Journal *of* Singularities
Volume 1 (2010), 13-38

received 9 September 2009
in revised form 17 December 2009
DOI: 10.5427/jsing.2010.1b

Théorèmes d'annulation et groupes de Picard

H. A. Hamm, Lê Dũng Tráng

Résumé

Dans cet article nous donnons des théorèmes du type de Lefschetz pour les groupes de Picard des variétés quasi-projectives. En particulier pour leur démonstration nous démontrons une généralisation du théorème d'annulation de Kodaira que nous interprétons comme un théorème de Lefschetz pour le faisceau structural.

Abstract

In this paper we give Lefschetz type theorems for Picard groups of quasi-projective varieties. In particular we prove a generalization of the Kodaira vanishing theorem that we understand as a Lefschetz theorem for the structural sheaf.

Introduction

Dans SGA2 ([9]) A. Grothendieck étudie le théorème de Lefschetz sur les sections hyperplanes pour la cohomologie des faisceaux cohérents sur les schémas projectifs. Il considère également en topologie le groupe fondamental et en géométrie algébrique le groupe de Picard. En particulier il démontre l'isomorphisme entre le groupe de Picard d'un schéma algébrique projectif et celui d'une section hyperplane sous une hypothèse *ad hoc* d'annulation de cohomologie analogue à celle du théorème de Kodaira.

Dans cet article nous étudions systématiquement le comportement du groupe de Picard d'une variété algébrique complexe quasi-projective par section hyperplane. Nous obtenons des énoncés pour des variétés algébriques complexes quasi-projectives mais nous faisons des hypothèses topologiques et analytiques. Une étape importante est la démonstration d'un théorème d'annulation qui généralise à notre situation le théorème d'annulation de Kodaira et qui est équivalent à un théorème du type de Lefschetz pour le faisceau structural.

Nous donnons trois méthodes pour établir des théorèmes du type de Lefschetz pour le groupe de Picard. Outre le calcul de Grothendieck, les méthodes utilisées sont les suivantes. L'une d'elles consiste à se ramener au cas où la variété est quasi-projective et non singulière. L'autre identifie sous certaines hypothèses le groupe de Picard algébrique et le groupe de Picard analytique que l'on étudie à l'aide de la suite exacte exponentielle, puis, comme dans [16], où l' on étudie le cas projectif, on utilise des théorèmes du type de Lefschetz pour la cohomologie à coefficients entiers et pour la cohomologie du faisceau structural. Nous utilisons essentiellement des méthodes transcendantes, mais les résultats de P. Deligne et L. Illusie dans [4] permettent d'espérer que les résultats basés sur la méthode de Grothendieck s'étendent aux corps de caractéristique zéro.

1 Théorème de Lefschetz singulier pour le groupe de Picard

Soit Y un espace analytique complexe réduit (resp. une variété algébrique complexe). Soit $\mathcal{O}_Y$ son faisceau structural. Soit m un entier. On note (cf [2] Part II §2):

$$S_m(\mathcal{O}_Y) = \{x \in Y \mid \mathrm{prof}\, \mathcal{O}_{Y,x} \leq m\},$$

où prof $\mathcal{O}_{Y,x}$ désigne la profondeur de l'anneau local $\mathcal{O}_{Y,x}$ (dans le cas algébrique pour définir $S_m(\mathcal{O}_Y)$ on ne considère que les points fermés x de Y). D'après un théorème de G. Scheja ([27]), $S_m(\mathcal{O}_Y)$ est un sous-espace analytique fermé de Y.

Pour un sous-espace analytique fermé A, on peut prendre pour définition:

$$\mathrm{prof}_A \mathcal{O}_Y \geq n :\Leftrightarrow \dim(A \cap S_{\ell+n}(\mathcal{O}_Y)) \leq \ell, \forall \ell,$$

en convenant $\dim(\emptyset) = -\infty$. On a le théorème suivant (voir [2] Part II Theorem 3.6):

1.1 Théorème. *Soit Y un espace analytique, A un sous-espace analytique fermé de Y. Pour tout entier $n \geq 1$, les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. $\mathrm{prof}_A \mathcal{O}_Y \geq n$;
2. *pour tout ouvert U de Y, on a:*

$$H^i_{A\cap U}(U, \mathcal{O}_Y) = 0$$

pour $i < n$.

Ce théorème montre clairement comment une condition sur la profondeur se traduit par l'annulation de cohomologies. Remarquons que la condition 2 du théorème ci-dessus peut s'écrire:

2 bis. pour tout ouvert U de Y, le morphisme naturel:

$$H^i(U, \mathcal{O}_Y) \to H^i(U \setminus A, \mathcal{O}_Y)$$

est bijectif pour $i \leq n-2$ et injectif pour $i = n-1$.

Rappelons que le groupe de Picard d'un espace annelé est le groupe des classes d'isomorphismes des faisceaux inversibles sur l'espace annelé. Donc, le groupe de Picard d'une variété algébrique est le groupe des classes d'isomorphismes des faisceaux inversibles sur la variété. Le groupe de Picard analytique est le groupe des classes d'isomorphismes des faisceaux analytiques inversibles sur l'espace analytique considéré.

De façon analogue au cas du théorème de Lefschetz sur les sections hyperplanes (voir [20]), nous avons un théorème du type de Lefschetz pour le groupe de Picard dans lequel nous avons des hypothèses de profondeur, i.e. des hypothèses d'annulation sur certaines cohomologies:

1.2 Théorème. *Soit X une variété projective complexe dans $\mathbb{P}_m$, Z un sous-espace fermé. Fixons une stratification de Whitney de X qui soit compatible avec Z et $\mathrm{Sing}\,X$. Soit H un hyperplan de $\mathbb{P}_m$ qui coupe X transversalement au sens stratifié. On fait l'hypothèse (H) suivante:*

$$\dim(X \setminus Z) \geq 4, \ \mathrm{prof}_{(\mathrm{Sing}\,X^{an} \setminus Z^{an})}\mathcal{O}_{(X^{an} \setminus Z^{an})} \geq 3$$

et on suppose de plus que $H^3(X^{an}, X^{an} \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) = 0$ pour tout $x \in X^{an} \setminus Z^{an}$. Alors

$$\mathrm{Pic}(X \setminus Z) \simeq \mathrm{Pic}(X \cap H \setminus Z).$$

Démonstration: Comme X est quasi-projectif, d'après [10] Prop. 21.3.3 et Cor. 2.3.5, le groupe de Picard de $X \setminus Z$ est isomorphe au groupe des classes de diviseurs de Cartier $\mathrm{CaCl}(X \setminus Z)$:

$$\mathrm{Pic}(X \setminus Z) \simeq \mathrm{CaCl}(X \setminus Z).$$

La même chose vaut pour $X \cap H \setminus Z$. En plus, l'application canonique

$$\mathrm{CaCl}(X \setminus Z) \longrightarrow \mathrm{Cl}(X \setminus Z)$$

dans le groupe des classes de diviseurs de Weil est injective, car avec les hypothèses du théorème, $X \setminus Z$ est normal (voir la Proposition 21.3.4b) et le Corollaire 21.6.10 de [10] ou aussi Lemma 2.2 de [16]).

D'après la définition de S_m avec $m = \dim(X^{an} \setminus Z^{an})$, on a évidemment:

$$S_{\dim(X^{an} \setminus Z^{an})}(\mathcal{O}_{(X^{an} \setminus Z^{an})}) = X^{an} \setminus Z^{an}$$

Pour $\ell = \dim X^{an} \setminus Z^{an} - 3$, l'hypothèse (H) implique que

$$\dim(\mathrm{Sing}\,(X \setminus Z)) \leq \dim(X^{an} \setminus Z^{an}) - 3,$$

c'est à dire

$$\mathrm{codim}_{(X \setminus Z)}\mathrm{Sing}\,(X \setminus Z) \geq 3 \text{ (donc } \geq 2).$$

Par [17] Theorem 1.5, comme $\mathrm{codim}_{(X \setminus Z)}\mathrm{Sing}\,(X \setminus Z) \geq 2$ nous savons que les groupes de classes de diviseurs de Weil $\mathrm{Cl}(X \setminus Z)$ et $\mathrm{Cl}(X \cap H \setminus Z)$ sont isomorphes:

$$\mathrm{Cl}(X \setminus Z) \simeq \mathrm{Cl}(X \cap H \setminus Z).$$

Ceci implique, en considérant le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Pic}(X \setminus Z) & \simeq & \mathrm{CaCl}(X \setminus Z) & \rightarrow & \mathrm{CaCl}(X \cap H \setminus Z) & \simeq & \mathrm{Pic}(X \cap H \setminus Z) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \mathrm{Cl}(X \setminus Z) & \simeq & \mathrm{Cl}(X \cap H \setminus Z) & &
\end{array}$$

que l'application canonique $\mathrm{CaCl}(X\setminus Z)\longrightarrow \mathrm{CaCl}(X\cap H\setminus Z)$ est injective puisqu'on vient de voir que $\mathrm{CaCl}(X\setminus Z)\longrightarrow \mathrm{Cl}(X\setminus Z)$ est injective. Il reste donc à démontrer la surjectivité de

$$h:\mathrm{Pic}(X\setminus Z)\longrightarrow \mathrm{Pic}(X\cap H\setminus Z)$$

Soit $[D_0]\in \mathrm{CaCl}(X\cap H\setminus Z)\simeq \mathrm{Pic}(X\cap H\setminus Z)$. Comme on vient de voir que

$$\mathrm{Cl}(X\setminus Z)\simeq \mathrm{Cl}(X\cap H\setminus Z),$$

la classe $[D_0]$ a une image inverse $[D]$ dans $\mathrm{Cl}(X\setminus Z)$. Il faut démontrer que $[D]$ est dans l'image de $\mathrm{CaCl}(X\setminus Z)$. Comme $X\setminus Z$ est normal, il suffit de démontrer que le faisceau $\mathcal{O}_{(X\setminus Z)}(D)$ des germes de sections méromorphes de $X\setminus Z$ dont la valuation le long d'une composante D_i de D est $\geq -n_i$, où n_i est la multiplicité de D_i dans D (voir [23] Definition p. 126), est inversible, ou bien que les fibres de $\mathcal{O}_{(X\setminus Z)}(D)$ sont isomorphes à celles de $\mathcal{O}_{(X\setminus Z)}$. En effet, comme le faisceau $\mathcal{O}_{(X\setminus Z)}(D)$ est engendré sur la partie non singulière de $X\setminus Z$ par des équations locales de D, le diviseur de Cartier ainsi associé au faisceau inversible $\mathcal{O}_{(X\setminus Z)}(D)$ donne un diviseur de Weil qui coïncide avec le diviseur D sur la partie non-singulière de $X\setminus Z$, ce qui établit notre assertion car $X\setminus Z$ est normal.

Pour démontrer que le faisceau $\mathcal{O}_{(X\setminus Z)}(D)$ est inversible on considère l'espace analytique X^{an} sous-jacent à la variété X. Par fidèle platitude, nous sommes emmenés à démontrer que les fibres de $\mathcal{O}_{(X^{an}\setminus Z^{an})}(D^{an})$ sont libres de rang 1, c'est-à-dire que $\mathcal{O}_{(X^{an}\setminus Z^{an})}(D^{an})$ est inversible.

Soit Σ le lieu où $\mathcal{O}_{(X^{an}\setminus Z^{an})}(D^{an})$ n'est pas libre de rang 1. L'ensemble Σ est un sous-espace algébrique fermé de $X^{an}\setminus Z^{an}$ car il est défini par un idéal de Fitting du $\mathcal{O}_{(X^{an}\setminus Z^{an})}$-module $\mathcal{O}_{(X^{an}\setminus Z^{an})}(D^{an})$.

Comme H est transverse à une stratification de Whitney de X (adaptée à Z et $\mathrm{Sing}\,X$), l'inclusion de $X\cap H$ dans X est normalement non-singulière au sens de §1.1 de [12]. On peut donc choisir un voisinage tubulaire ouvert V de $X^{an}\cap H^{an}$ dans X^{an} au sens stratifié. Soit $\pi: V\longrightarrow X^{an}\cap H^{an}$ la rétraction correspondante.

Nous allons montrer que $\Sigma\cap V=\emptyset$.

Soit $z\in X^{an}\cap H^{an}$ et W un voisinage de z dans $X^{an}\cap H^{an}$ tel que $\pi^{-1}(W)$ soit homéomorphe à $W\times N$, avec $N:=\pi^{-1}(z)$. Remarquons que N est homéomorphe à un disque. Pour $z'\in W\setminus Z^{an}$, comme par hypothèse $\mathcal{O}_{((X^{an}\setminus Z^{an})\cap H^{an})}(D_0^{an})$ est localement libre, il existe un voisinage W' de z' dans $W\setminus Z^{an}$ tel que $\mathcal{O}_{((X^{an}\setminus Z^{an})\cap H^{an})}(D_0^{an})_{|W'}$ soit trivial. Par ailleurs, comme D^{an} est un diviseur de Weil, sur la partie non-singulière $X^{an}\setminus(\mathrm{Sing}\,X^{an}\cup Z^{an})$ le faisceau

$$\mathcal{O}_{(X^{an}\setminus Z^{an})}(D^{an})_{|X^{an}\setminus(\mathrm{Sing}\,X^{an}\cup Z^{an})}$$

est localement trivial. Soit x un point de $\pi^{-1}(W')$, il existe un voisinage de Stein V' de x dans $\pi^{-1}(W')$. Donc, $H^1(V',\mathcal{O}_{V'})=0$. Ceci implique que:

1.3 Lemme. *Le faisceau $\mathcal{O}_{(X^{an}\setminus Z^{an})}(D^{an})_{|V'\setminus \mathrm{Sing}\,X^{an}}$ est trivial.*

Preuve : Le faisceau $\mathcal{O}_{(X^{an}\setminus Z^{an})}(D^{an})_{|V'\setminus \mathrm{Sing}\,X^{an}}$ est inversible. Sa classe ξ dans le groupe de Picard analytique $\mathrm{Pic}_{(an)}(V'\setminus \mathrm{Sing}\,X^{an})$ est en fait nulle. Ceci provient de l'étude que nous allons faire de la suite exacte suivante :

$$H^1(V'\setminus \mathrm{Sing}\,X^{an},\mathcal{O}_{V'})\to \mathrm{Pic}_{(an)}(V'\setminus \mathrm{Sing}\,X^{an})\to H^2(V'\setminus \mathrm{Sing}\,X^{an},\mathbb{Z}).$$

Comme le faisceau $\mathcal{O}_{((X^{an}\setminus Z^{an})\cap H^{an}))}(D_0^{an})_{|W'}$ est trivial, la classe de Chern

$$c_1(\mathcal{O}_{((X^{an}\setminus Z^{an})\cap H^{an})}(D_0^{an})_{|W'}) = 0.$$

Par conséquent, on a aussi par restriction :

$$c_1(\mathcal{O}_{((X^{an}\setminus Z^{an})\cap H^{an})}(D_0^{an})_{|W'\setminus \mathrm{Sing}\, X^{an}}) = 0.$$

Comme H est un hyperplan assez général, le premier lemme d'isotopie de Thom (voir [25]) implique que l'espace $\pi^{-1}(W') \setminus \mathrm{Sing}\, X^{an}$ est homéomorphe au produit $(W' \setminus \mathrm{Sing}\, X^{an}) \times N$. La cohomologie $H^2(W' \setminus \mathrm{Sing}\, X^{an},\, \mathbb{Z})$ est isomorphe par π^* à la cohomologie $H^2(\pi^{-1}(W') \setminus \mathrm{Sing}\, X^{an},\, \mathbb{Z})$. Par $\pi*$ la classe de Chern

$$c_1(\mathcal{O}_{(X^{an}\setminus Z^{an})}(D^{an})_{|\pi^{-1}(W')\setminus \mathrm{Sing}\, X^{an}})$$

a pour image la classe de la restriction de $\mathcal{O}_{(X^{an}\setminus Z^{an})}(D^{an})_{|\pi^{-1}(W')\setminus \mathrm{Sing}\, X^{an}}$ à H^{an}. On vient de voir qu'elle est nulle. Comme π^* est un isomorphisme, on a:

$$c_1(\mathcal{O}_{(X^{an}\setminus Z^{an})}(D^{an})_{|\pi^{-1}(W')\setminus \mathrm{Sing}\, X^{an}}) = 0$$

ce qui donne par restriction :

$$c_1(\mathcal{O}_{(X^{an}\setminus Z^{an})}(D^{an})_{|V'\setminus \mathrm{Sing}\, X^{an}}) = 0.$$

La suite exacte ci-dessus montre alors que la classe ξ est dans l'image du groupe:

$$H^1(V' \setminus \mathrm{Sing}\, X^{an}, \mathcal{O}_{V'}).$$

D'autre part d'après le Théorème 3.6 du Chap.2 de [2] (voir 1.1), l'hypothèse (H) sur la profondeur

$$\dim(\mathrm{Sing}(X \setminus Z) \cap S_{\ell+3}(\mathcal{O}_{X^{an}\setminus Z^{an}})) \leq \ell$$

donne que le groupe de cohomologie $H^1(V' \setminus \mathrm{Sing}\, X^{an}, \mathcal{O}_{V'})$ est isomorphe au groupe $H^1(V', \mathcal{O}_{V'})$ qui est nul. Ceci implique que ξ est nul et que le faisceau inversible restriction de $(\mathcal{O}_{X^{an}\setminus Z^{an}})(D^{an})$ à $V' \setminus \mathrm{Sing}\, X^{an}$ est trivial.

Suite de la démonstration de Théorème 1.2: Grâce au Lemme 1.3, il y a une fonction méromorphe f sur $V' \setminus \mathrm{Sing}\, X^{an}$ dont le diviseur coïncide avec $D^{an} \cap V' \setminus \mathrm{Sing}\, X^{an}$. Soit U un voisinage ouvert de x dans V'. D'après le théorème 1.1 l'hypothèse (H) implique que

$$H^1(U, U \setminus \mathrm{Sing}\, X^{an}; \mathcal{O}_{X^{an}}) = 0,$$

ce qui implique que V' est localement irréductible en x. Cette irréducibilité locale est aussi conséquence de la normalité de $X \setminus Z$ donnée par les hypothèses du Théorème. Quitte à rétrécir V' nous pouvons donc supposer que V' est irréductible. Or, comme ci-dessus, l'espace $V' \cap \mathrm{Sing}\, X^{an}$ est de codimension $\geq 3 > 2$ à cause de l'hypothèse (H) . Il y a donc une extension méromorphe $\hat{f}$ de f sur V', voir [24] §53A.9. Le diviseur de $\hat{f}$ doit coïncider avec $D^{an} \cap V'$. Le faisceau $(\mathcal{O}_{X^{an}\setminus Z^{an}})(D^{an})_{|V'}$ est donc trivial.

Ceci démontre que la restriction $(\mathcal{O}_{X^{an}\setminus Z^{an}})(D^{an})_{|V\setminus Z^{an}}$ est inversible.

Par conséquent on a bien obtenu $\Sigma \cap V = \emptyset$.

Ceci implique que Σ est de dimension 0, donc fini. D'autre part on a évidemment:

$$\Sigma \subset \mathrm{Sing}\,(X^{an} \setminus Z^{an}).$$

Supposons $x \in \Sigma$. Soit U un voisinage de Stein convenable du point $x \in \Sigma$ dans l'espace $X^{an} \setminus Z^{an}$ pour lequel $U \cap \Sigma = \{x\}$. Alors D^{an} définit un fibré en droites sur $U \setminus \{x\}$. On sait que $c_1(\mathcal{O}_{(X^{an}\setminus Z^{an})}(D^{an})_{|U\setminus\{x\}}) = 0$, parce que:

$$H^2(U \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) = H^3(X^{an}, X^{an} \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) = 0.$$

Par un raisonnement analogue à celui fait précédemment, on montre que $\mathcal{O}_{(X^{an}\setminus Z^{an})}(D^{an})$ est inversible et trivial sur $U \setminus \{x\}$. En effet, on montre que:

$$c_1(\mathcal{O}_{(X^{an}\setminus Z^{an})}(D^{an})|U \setminus \{x\}) = 0$$

donc la classe dans $\mathrm{Pic}_{(an)}(U \setminus \{x\})$ du faisceau inversible $\mathcal{O}_{(X^{an}\setminus Z^{an})}(D^{an})|U \setminus \{x\}$ provient du groupe de cohomologie $H^1(U \setminus \{x\}, \mathcal{O}_U)$.
D'après le Théorème 1.1 et l'hypothèse (H) qui donne prof $\mathcal{O}_{X^{an},x} \geq 3$, la cohomologie locale $H^i_{\{x\}}(U, \mathcal{O}_U) = 0$ pour $i < 3$ donc, en particulier, que le groupe de cohomologie $H^1(U, \mathcal{O}_U)$ est isomorphe à $H^1(U\setminus\{x\}, \mathcal{O}_U)$. Or l'ouvert U étant de Stein, $H^1(U, \mathcal{O}_U)$ est nul, ce qui montre que le faisceau $(\mathcal{O}_{X^{an}\setminus Z^{an}})(D^{an})|U \setminus \{x\}$ est trivial.
Comme précédemment, comme $\mathrm{codim}_U(\{x\}) \geq 2$ ce faisceau se prolonge à U en un faisceau inversible trivial, car la fonction méromorphe qui définit son diviseur se prolonge à U et définit une extension de ce faisceau.

Ceci contredit $x \in \Sigma$. Donc $\Sigma = \emptyset$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Observation: En utilisant la Proposition 2.6 de [15], on peut montrer:

$$\mathrm{prof}_{(\mathrm{Sing}\,X^{an}\setminus Z^{an})}\mathcal{O}_{(X^{an}\setminus Z^{an})} \simeq \mathrm{prof}_{(\mathrm{Sing}\,X\setminus Z)}\mathcal{O}_{(X\setminus Z)}.$$

Remarque: Dans la démonstration précédente nous avons en fait établi (voir Lemma 2.6 de [16]) :

1.4 Proposition. *Soit X une variété algébrique complexe. Soit $x \in X$ un point fermé de X. On suppose que* $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{X^{an},x}) \geq 3$ *et que* $H^3(X^{an}, X^{an} \setminus \{x\}, \mathbb{Z}) = 0$*, alors X est parafactoriel en x.*

Preuve: La notion de parafactorialité a été introduite par A. Grothendieck (cf. [9] XI, §3, Définition 3.1). Il suffit de démontrer que tout faisceau inversible sur $X \setminus \{0\}$ se prolonge uniquement à isomorphisme près à X. C'est précisément ce que nous avons fait.

1.5 Corollaire. *Soient X une variété projective complexe dans $\mathbb{P}_m$ et Z un sous-espace fermé de X. On suppose que $X^{an} \setminus Z^{an}$ est localement une intersection complète de dimension ≥ 4 et* $\mathrm{Sing}(X^{an} \setminus Z^{an})$ *de codimension ≥ 3. Fixons une* *stratification de Whitney de X qui soit compatible avec Z et* $\operatorname{Sing} X$*. Soit H un hyperplan de $\mathbb{P}_m$ qui coupe X transversalement au sens stratifié. Alors*

$$\operatorname{Pic}(X \setminus Z) \simeq \operatorname{Pic}(X \cap H \setminus Z).$$

Preuve: Ce corollaire est une conséquence immédiate du théorème précédent, parce que l'hypothèse que $X^{an} \setminus Z^{an}$ est localement une intersection complète de dimension ≥ 4 implique les hypothèses du théorème 1.2, car

$$\operatorname{prof}(\mathcal{O}_{X^{an},x}) = \dim X$$

car une intersection complète est localement Cohen-Macaulay et topologiquement:

$$H^3(X^{an}, X^{an} \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) = 0$$

si $\dim X \geq 3$.

2 Cas affine

Comme nous utilisons des méthodes analytiques, nous rappelons les points suivants.

Pour un espace analytique général il y a une différence entre le groupe des classes diviseurs de Cartier et le groupe de Picard.

Soit Y un espace analytique complexe normal. Soit $\operatorname{Cl}(Y)$ le groupe des classes de diviseurs de Weil sur Y. On remarque que $\operatorname{CaCl}(Y)$ est le sous-groupe de $\operatorname{Cl}(Y)$ formé par les éléments $[D]$ tels que le faisceau $\mathcal{O}_Y(D)$ soit inversible. On a une injection canonique $\operatorname{CaCl}(Y) \longrightarrow \operatorname{Pic}(Y)$.

On peut définir $\operatorname{CaCl}(Y)$ d'une autre façon: Soit $\mathcal{M}_Y^*$ le faisceau de germes de fonctions méromorphes non-triviales. Alors $H^0(Y, \mathcal{M}_Y^*/\mathcal{O}_Y^*)$ est l'espace des distributions multiplicatives de Cousin. On a une flèche canonique injective $H^0(Y, \mathcal{M}_Y^*/\mathcal{O}_Y^*) \longrightarrow \operatorname{Div} Y$ où $\operatorname{Div} Y$ désigne le groupe des diviseurs de Weil sur Y. La suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y^* \longrightarrow \mathcal{M}_Y^* \longrightarrow \mathcal{M}_Y^*/\mathcal{O}_Y^* \longrightarrow 0$$

donne une suite exacte de cohomologie

$$H^0(Y, \mathcal{M}_Y^*) \xrightarrow{i} H^0(Y, \mathcal{M}_Y^*/\mathcal{O}_Y^*) \longrightarrow H^1(Y, \mathcal{O}_Y^*) \longrightarrow H^1(Y, \mathcal{M}_Y^*)$$

On a donc une injection de $Coker\, i$ dans $\operatorname{Pic}(Y) = H^1(Y, \mathcal{O}_Y^*)$ qui est bijective si $H^1(Y, \mathcal{M}_Y^*) = 0$.

De plus, on obtient une flèche injective $Coker\, i \longrightarrow \operatorname{Cl}(Y)$. Évidemment, on peut identifier $Coker\, i$ avec $\operatorname{CaCl}(Y)$.

Il y a un cas où il y a une coincidence de $\operatorname{CaCl}(Y)$ et de $\operatorname{Pic}(Y)$:

2.1 Lemme. *Si Y est un espace analytique de Stein on a:*

$$\operatorname{CaCl}(Y) \simeq \operatorname{Pic}(Y) \simeq H^2(Y; \mathbb{Z}).$$

Démonstration: D'après [24] Cor. 54.8, $\mathrm{CaCl}(Y) \simeq H^2(Y;\mathbb{Z})$. Comme Y est de Stein, $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ et la suite exacte exponentielle donne $\mathrm{Pic}(Y) = H^1(Y, \mathcal{O}_Y^*) \simeq H^2(Y;\mathbb{Z})$.

Rappelons la définition de la profondeur cohomologique rectifiée $\mathrm{pcr}(Z)$ d'un espace analytique complexe Z (voir Definition 1.2 of [16]). Soit:

$$\mathcal{S}_m(Z) := \{x \in Z \,|\, H^m(Z, Z \setminus \{x\}, \mathbb{Z}) \neq 0\}.$$

On définit

$$\mathrm{pcr}(Z) \geq n :\Leftrightarrow \dim \mathcal{S}_{n+m}(Z) \leq m, \forall m.$$

Remarquons qu'avec la définition 1.2.1 de [20] nous avons $\mathrm{pcr}(Z) \geq n$ si et seulement si le faisceau constant $\mathbb{Z}_Z$ est dans ${}^{1/2}D^{\geq n}(Z, \mathbb{Z})$ ce qui s'exprime aussi par l'annulation de cohomologies. On obtient alors:

2.2 Théorème. *Soit X une variété projective complexe dans $\mathbb{P}_m$, Z un sous-espace fermé. Supposons que $X \setminus Z$ est affine. Fixons une stratification de Whitney de X qui soit compatible avec Z et* $\mathrm{Sing}\, X$. *Soit H un hyperplan de $\mathbb{P}_m$ qui coupe X transversalement au sens stratifié.*

a) Supposons $\mathrm{pcr}(X^{an} \setminus Z^{an}) \geq 3$. *Alors la flèche canonique*

$$\mathrm{Pic}_{(an)}(X^{an} \setminus Z^{an}) \longrightarrow \mathrm{Pic}_{(an)}(X^{an} \cap H^{an} \setminus Z^{an})$$

est injective.

b) Soit $\mathrm{pcr}(X^{an} \setminus Z^{an}) \geq 4$. *Alors*

$$\mathrm{Pic}_{(an)}(X^{an} \setminus Z^{an}) \simeq \mathrm{Pic}_{(an)}(X^{an} \cap H^{an} \setminus Z^{an}).$$

Démonstration. Comme la variété affine $X \setminus Z$ est un espace analytique de Stein, le groupe de Picard analytique de $X \setminus Z$ est isomorphe à $H^2(X^{an} \setminus Z^{an};\mathbb{Z})$. De même pour $X \cap H \setminus Z$. L'assertion a) revient à démontrer que l'homomorphisme

$$H^2(X^{an} \setminus Z^{an};\mathbb{Z}) \to H^2(X^{an} \cap H^{an} \setminus Z^{an};\mathbb{Z})$$

est injectif. Comme $\mathrm{pcr}(X^{an} \setminus Z^{an}) \geq 3$, cette assertion est un théorème du type de Lefschetz comme dans [19].

L'assertion b) revient à montrer que l'homorphisme précédent est surjectif, ce qui est impliqué par $\mathrm{pcr}(X^{an} \setminus Z^{an}) \geq 4$, d'après les théorèmes du type de Lefschetz de [19].

3 Comparaison entre les cas algébriques et analytiques

Dans le cas où Z est de codimension ≥ 2 (dans ce cas $Z \cap H$ est aussi de codimension ≥ 2 dans $X \cap H$):

3.1 Lemme. *Soient X une variété projective complexe, Z un sous-espace fermé de codimension ≥ 2.*
a) $\mathrm{Cl}(X^{an} \setminus Z^{an}) \simeq \mathrm{Cl}(X \setminus Z)$ *et* $\mathrm{CaCl}(X^{an} \setminus Z^{an}) \simeq \mathrm{Pic}(X \setminus Z)$.
b) S'il existe un voisinage ouvert $U(Z)$ de Z dans X pour lequel

$$\dim U(Z) \cap S_{k+2}(\mathcal{O}_{X^{an}\setminus Z^{an}}) \leq k$$

pour tout $k \leq \dim Z$, on a

$$\mathrm{Pic}_{(an)}(X^{an} \setminus Z^{an}) \simeq \mathrm{Pic}(X \setminus Z).$$

Démonstration: a) La flèche $\mathrm{Cl}(X \setminus Z) \longrightarrow \mathrm{Cl}(X^{an} \setminus Z^{an})$ est bijective.
En effet, par le théorème de Remmert-Stein ([13] p.169), chaque diviseur de $X^{an} \setminus Z^{an}$ peut être étendu à X^{an}. Par le théorème de Chow l'extension est algébrique. Il en résulte que les groupes des diviseurs de Weil $\mathrm{Div}(X^{an} \setminus Z^{an}) \simeq \mathrm{Div}(X) \simeq \mathrm{Div}(X \setminus Z)$ sont isomorphes. Comme chaque fonction méromorphe sur $X^{an} \setminus Z^{an}$ peut être étendue à X^{an} par [24] 53.A.9 et que l'extension est algébrique par le théorème de Hurwitz [7] 4.7 on a $\mathrm{Cl}(X \setminus Z) \simeq \mathrm{Cl}(X^{an} \setminus Z^{an})$.

Comme $\mathrm{CaCl}(X \setminus Z)$ correspond au sous-groupe de $\mathrm{Cl}(X \setminus Z)$ formé par les éléments $[D]$ tels que $\mathcal{O}_{X\setminus Z}(D)$ soit inversible, on obtient que

$$\mathrm{Pic}(X \setminus Z) \simeq \mathrm{CaCl}(X \setminus Z) \simeq \mathrm{CaCl}(X^{an} \setminus Z^{an}).$$

b) La flèche $\mathrm{Pic}(X \setminus Z) \longrightarrow \mathrm{Pic}_{(an)}(X^{an} \setminus Z^{an})$ est surjective. En effet soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur $X^{an} \setminus Z^{an}$ et $j : X^{an} \setminus Z^{an} \longrightarrow X^{an}$ l'inclusion. Alors $j_*\mathcal{L}$ est cohérent à cause de l'hypothèse sur la profondeur, voir [8] Cor. VII.4 ou [31] Theorem 2 (voir la remarque à la fin de l'article); par GAGA ce faisceau provient d'un faisceau algébrique cohérent $\mathcal{F}$ sur X. Alors la restriction $\mathcal{F}_{|X\setminus Z}$ est inversible et représente l'image inverse cherchée.
La composition

$$\mathrm{Pic}(X \setminus Z) \longrightarrow \mathrm{CaCl}(X \setminus Z) \longrightarrow \mathrm{CaCl}(X^{an} \setminus Z^{an}) \longrightarrow \mathrm{Pic}_{(an)}(X^{an} \setminus Z^{an})$$

montre que $\mathrm{Pic}(X \setminus Z) \longrightarrow \mathrm{Pic}_{(an)}(X^{an} \setminus Z^{an})$ est injective parce que les premières flèches sont bijectives et la troisième injective (§2), comme on l'a vu ci-dessus.

Dans la démonstration du lemme précédent on ne suppose pas qu'une variété algébrique est irréductible.

3.2 Corollaire. *Sous les hypothèses du Théorème 1.2, si* $\mathrm{codim}_X Z \geq 3$*, on a:*

$$\mathrm{Pic}_{(an)}(X^{an} \setminus Z^{an}) \simeq \mathrm{Pic}(X \setminus Z) \simeq Pic(X \cap H \setminus Z) \simeq \mathrm{Pic}_{(an)}(X^{an} \cap H^{an} \setminus Z^{an}).$$

Démonstration: Si $k + 2 < \dim(X^{an} \setminus Z^{an})$, on a évidemment

$$S_{k+2}(\mathcal{O}_{X^{an}\setminus Z^{an}}) \subset \mathrm{Sing}(X^{an} \setminus Z^{an}),$$

donc $\dim S_{k+2}(\mathcal{O}_{X^{an}\setminus Z^{an}}) \leq k - 1$, à cause de l'hypothèse (H) du théorème 1.2.
Pour $k + 2 \geq \dim(X^{an} \setminus Z^{an})$ nous avons $k > \dim Z$ car on a supposé $\mathrm{codim}_X Z \geq 3$.

Nous pouvons donc appliquer le lemme 3.1 et ceci nous donne le corollaire. $\square$

Ce qui se passe dans le cas où Z est de codimension ≤ 2 sans que $X \setminus Z$ soit affine n'est pas clair.

4 Théorème de Lefschetz pour le faisceau structural

Du paragraphe qui précède nous pouvons déduire un théorème du type de Lefschetz pour le faisceau structural:

4.1 Théorème. *Sous les hypothèses de Théorème 1.2, supposons en plus que la profondeur cohomologique rectifiée vérifie l'inégalité* $\mathrm{pcr}_{\mathbb{Z}}(X^{an} \setminus Z^{an}) \geq 3$ *et* $\mathrm{codim}_X Z \geq 3$*. Alors*

$$H^1(X^{an} \setminus Z^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}}) \simeq H^1(X^{an} \cap H^{an} \setminus Z^{an}, \mathcal{O}_{X^{an} \cap Z^{an}}).$$

Démonstration: On applique le lemme des cinq à la suite exacte exponentielle. D'abord, on a

$$H^1(X^{an} \setminus Z^{an}, \mathcal{O}^*_{X^{an}}) \simeq H^1(X^{an} \cap H^{an} \setminus Z^{an}, \mathcal{O}^*_{X^{an} \cap H^{an}})$$

à cause du Corollaire 3.2. Le théorème de Lefschetz géométrique (cf. [18]) donne que l'homomorphisme

$$H^k(X^{an} \setminus Z^{an}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(X^{an} \cap H^{an} \setminus Z^{an}; \mathbb{Z})$$

est bijectif pour $k = 1$ et injectif pour $k = 2$. Il reste à démontrer la surjectivité de

$$H^0(X^{an} \setminus Z^{an}, \mathcal{O}^*_{X^{an}}) \to H^0(X^{an} \cap H^{an} \setminus Z^{an}, \mathcal{O}^*_{X^{an} \cap H^{an}}).$$

Soit f une section de $H^0(X^{an} \cap H^{an} \setminus Z^{an}, \mathcal{O}^*_{X^{an} \cap H^{an}})$. L'hypothèse (H) du théorème 1.2 implique (par normalité) que f s'étend à $X^{an} \cap H^{an}$. Comme $X^{an} \cap H^{an}$ est compact, f est localement constante et la surjectivité provient de l'isomorphisme de Lefschetz géométrique ci-dessus quand $k = 0$. $\square$

Nous allons maintenant donner un théorème d'annulation qui nous donnera une généralisation du théorème de Kodaira et nous permettra d'étudier le groupe de Picard.

La notion de la profondeur par rapport à un sous-espace introduite dans le §1 peut se généraliser aux faisceaux cohérents de la façon suivante:

Soit X une variété algébrique complexe, Y un sous-espace fermé. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau algébrique cohérent sur X. On définit:

$$\mathrm{prof}_Y \mathcal{F} \geq n \Longleftrightarrow \dim\{x \in Y,\, x \text{ point fermé de } Y \mid \mathrm{prof}\, \mathcal{F}_x \leq n+k\} \leq k \text{ pour tout } k.$$

Ici $\mathrm{prof}\, \mathcal{F}_x$ est la profondeur du $\mathcal{O}_{X,x}$-module $\mathcal{F}_x$ (cf. [28]).

D'abord on a le théorème suivant qui est bien connu dans le cas $Z = \emptyset$ (cf. [9] Exposé XII, corollaire 1.4):

4.2 Théorème. *Soient X une variété projective complexe, Z un sous-espace algébrique fermé, $\mathcal{S}$ un faisceau algébrique cohérent sur X,* $\mathrm{prof}\, \mathcal{S}_{|X \setminus Z} \geq n$*. Soit $\mathcal{L}$ un faisceau ample sur X. Alors*

$$H^q(X \setminus Z, \mathcal{S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{-l}) = 0$$

pour $q < n - \max(\dim Z, -1) - 1$, $l \gg 0$.

Démonstration: Soit $X \subset \mathbb{P}_m$ et $i : X \longrightarrow \mathbb{P}_m$ l'inclusion. En remplaçant $\mathcal{S}$ par $i_*\mathcal{S}$ on peut supposer que $X = \mathbb{P}_m$. Soit $d := \dim Z$.
Notons que $n \leq m$. On procède par récurrence sur $m - n$.
Si $n = m$ on a que la restriction $\mathcal{S}_{|\mathbb{P}_m \setminus Z}$ est localement libre, car $\mathbb{P}_m \setminus Z$ est lisse. En effet, soit x un point fermé de $\mathbb{P}_m \setminus Z$, alors $\operatorname{prof} \mathcal{S}_x + \operatorname{dh} \mathcal{S}_x = m$, où dh désigne la dimension homologique (voir [28] IV D Prop. 21); comme $\operatorname{prof} \mathcal{S}_x = m$, $\mathcal{S}_x$ est projectif, donc libre (voir [28] IV Prop. 20).

On remarque que sur $\mathbb{P}_m \setminus Z$ on a

$$\mathcal{S}_{|\mathbb{P}_m \setminus Z} \simeq Hom(Hom(\mathcal{S}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_m}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}_m})_{|\mathbb{P}_m \setminus Z}$$

Soit $\mathcal{S}' = Hom(\mathcal{S}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_m})$. Choisissons une résolution localement libre à gauche $\mathcal{F}'_*$ de $\mathcal{S}'$ (cf. [21] Corollary II 5.18). Comme $\mathcal{S}'_{|\mathbb{P}_m \setminus Z}$ est localement libre, le faisceau $Ext^q(\mathcal{S}', \mathcal{O}_{\mathbb{P}_m})$ est concentré sur Z pour $q > 0$, donc

$$0 \to Hom(\mathcal{S}', \mathcal{O}_{\mathbb{P}_m})_{|\mathbb{P}_m \setminus Z} \to \mathcal{F}^0_{|\mathbb{P}_m \setminus Z} \to \mathcal{F}^1_{|\mathbb{P}_m \setminus Z} \to \dots$$

avec $\mathcal{F}^q := Hom(\mathcal{F}'_q, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_m})$ est exacte. Or on a

$$H^q(\mathbb{P}_m \setminus Z, \mathcal{S} \otimes \mathcal{L}^{-l}) = H^q(\mathbb{P}_m \setminus Z, Hom(\mathcal{S}', \mathcal{O}_{\mathbb{P}_m}) \otimes \mathcal{L}^{-l})$$

qui est isomorphe à l'hypercohomologie $\mathbb{H}^q(\mathbb{P}_m \setminus Z, \mathcal{F}^* \otimes \mathcal{L}^{-l})$.

D'autre part, pour $k \geq 0$, dans [9] III Lemme 3.1, comme $\operatorname{prof}_Z \mathcal{F}^k \otimes \mathcal{L}^{-l} \geq m - \dim Z$ un résultat de A. Grothendieck donne que $H^q(\mathbb{P}_m \setminus Z, \mathcal{F}^k \otimes \mathcal{L}^{-l}) \simeq H^q(\mathbb{P}_m, \mathcal{F}^k \otimes \mathcal{L}^{-l})$, pour $q < m - \dim Z - 1$. Un autre résultat de Grothendieck (voir [9] XII Corollaire 1.4) donne

$$H^q(\mathbb{P}_m, \mathcal{F}^k \otimes \mathcal{L}^{-l}) = 0$$

pour $q \leq m$ et $l \gg 0$. Une suite spectrale donne l'annulation de l'hypercohomologie :

$$\mathbb{H}^q(\mathbb{P}_m \setminus Z, \mathcal{F}^* \otimes \mathcal{L}^{-l}) = 0$$

pour $q < m - \dim Z - 1$ et $l \gg 0$.

Par conséquent

$$H^q(\mathbb{P}_m \setminus Z, \mathcal{S} \otimes \mathcal{L}^{-l}) = 0$$

pour $q < m - \dim Z - 1$ et $l \gg 0$.

Soit $n < m$. Il y a une suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow 0$ avec $\mathcal{F}$ localement libre (voir e.g. [21] Cor. 5.18 Chap II). On a $\operatorname{prof} \mathcal{T}_{|\mathbb{P}_m \setminus Z} \geq n + 1$ (voir [2] I Cor. 1.13) et $\operatorname{prof} \mathcal{F} = m$. La suite exacte de cohomologie et l'hypothèse de récurrence donnent le résultat cherché.

Le théorème suivant a déjà été énoncé dans le cas $Z = \emptyset$ avec une démonstration par Anapura et Jaffe [1] (Proposition 1.1), par une démonstration différente :

4.3 Théorème. *Soient X une variété projective complexe dans $\mathbb{P}_m$, Z un sous-espace fermé, H un hyperplan dans $\mathbb{P}_m$ qui ne contient pas X. Soit $n \in \mathbb{N}$:*

$$\operatorname{codim}_X Z \geq n + 1 \quad \textit{et} \quad \operatorname{prof}_{\operatorname{Sing}(X \setminus Z)} \mathcal{O}_{X \setminus Z} \geq n,$$

$\dim X \geq n$. *Alors*

$$H^q(X \setminus Z, \mathcal{O}_{X\setminus Z}) \longrightarrow H^q(X \cap H \setminus Z, \mathcal{O}_{X\cap H\setminus Z})$$

est bijectif pour $q < n-1$ *et injectif pour* $q = n-1$.

Démonstration: Soit $\mathcal{I} = \mathcal{O}_X(-H)$ l'idéal de H dans $\mathcal{O}_X$. Il faut démontrer que

$$H^q(X \setminus Z, \mathcal{I}) = 0,\ q < n.$$

On peut remplacer H par un hyperplan générique L car

$$H^q(X \setminus Z, \mathcal{O}_X(-H)) \simeq H^q(X \setminus Z, \mathcal{O}_X(-L)).$$

On va procéder par récurrence sur $\dim X$.

Dans le cas $\dim X = n$, nécessairement $Z = \emptyset$. La condition sur la profondeur donne $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_X) = n$ et signifie que X est de Cohen-Macaulay. De plus les singularités de X sont isolées. Si X est lisse,

$$H^k(X, \mathcal{O}_X(-L)) = 0,$$

pour $k < n$, par le théorème de Kodaira, voir [21] p. 248, car, pour L assez général, $\mathcal{O}_X(L))$ est un faisceau très ample.

Supposons que X ait des singularités isolées. Comme L est assez général, on a que

$$H^k(X^{an} \setminus \mathrm{Sing}\, X^{an}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^k((X^{an} \setminus \mathrm{Sing}\, X^{an}) \cap L^{an}; \mathbb{Z})$$

est bijectif pour $k < n-1$, et injectif pour $k = n-1$, d'après le Théorème de Lefschetz de [18]. Comme les singularités sont isolées, on a

$$(X^{an} \setminus \mathrm{Sing}\, X^{an}) \cap L^{an} = X^{an} \cap L^{an},$$

c'est à dire

$$H^k(X^{an} \setminus \mathrm{Sing}\, X^{an}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(X^{an} \cap L^{an}; \mathbb{Z})$$

est bijectif pour $k < n-1$, et injectif pour $k = n-1$.

Soit $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ une désingularisation de X telle que $D := \pi^{-1}(\mathrm{Sing}\, X)$ soit un diviseur à croisements normaux. Alors l'homorphisme

$$H^k(X^{an} \setminus \mathrm{Sing}\, X^{an}; \mathbb{C}) \longrightarrow H^k(X^{an} \cap L^{an}; \mathbb{C})$$

s'identifie avec l'homorphisme d'hypercohomologie

$$\mathbb{H}^k(\tilde{X}, {\Omega^*}_{\tilde{X}}(log\, D)) \longrightarrow \mathbb{H}^k(X \cap H, {\Omega^*}_{X\cap L}),$$

où $X \cap L$ est identifié à son image inverse par π puisque π est un isomorphisme en dehors des singularités isolées. Or, il s'agit d'une application de structures de Hodge mixtes; en considérant le terme Gr_F^0 en degré 0, on obtient que $H^k(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) \longrightarrow H^k(X \cap H, \mathcal{O}_{X\cap L})$ est bijectif pour $k < n-1$ et injectif pour $k = n-1$ (Voir [3]).

Comme $H^k(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-L)) = H^k(\tilde{X}^{an}, \mathcal{O}_{\tilde{X}^{an}}(-L))$ d'après GAGA, ce qui précède implique que $H^k(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-L)) = H^k(\tilde{X}^{an}, \mathcal{O}_{\tilde{X}^{an}}(-L)) = 0$, $k < n$, où $\mathcal{O}_{\tilde{X}^{an}}(-L)$ désigne l'idéal qui définit L dans $\tilde{X}$.

Soit U un voisinage fermé convenable de $X^{an} \cap L^{an}$ dans X^{an} tel que U ne contienne pas de singularités et que $X^{an} \setminus U$ soit un ouvert de Stein. Alors (voir [2] I Theorem 3.6)

$$H_c^k(X^{an} \setminus U, \mathcal{O}_{X^{an}}(-L)) = 0, \ k < n,$$

car on a vu que $\mathrm{prof}\mathcal{O}_X = n$.

La composition des flèches

$$H^k(X^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}}(-L)) \longrightarrow H^k(\tilde{X}^{an}, \mathcal{O}_{\tilde{X}^{an}}(-L)) \longrightarrow H^k(U, \mathcal{O}_{X^{an}}(-L))$$

est donc injective pour $k < n$; comme $H^k(\tilde{X}^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}}(-L)) = 0$, $k < n$, par GAGA on obtient que $H^k(X, \mathcal{O}_X(-L)) \simeq H^k(X^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}}(-L)) = 0$, $k < n$. Cette annulation est aussi obtenue grâce au théorème (7.80) de [29] et ceci est l'annulation cherchée.

Soit $\dim X > n$. Soit Y le lieu des points qui sont ou bien dans Z ou bien en lesquels la profondeur $\mathrm{prof}\, \mathcal{O}_{X,x} \leq n + d$, avec $d = \dim Z$. Alors $\dim Y = d$. En effet, comme on a supposé $\mathrm{prof}_{\mathrm{Sing}(X \setminus Z)} \mathcal{O}_{X \setminus Z} \geq n$, on a $\dim(Y \cap \mathrm{Sing}(X \setminus Z)) \leq d$. Par ailleurs $Y \cap (X \setminus Z) \setminus \mathrm{Sing}(X \setminus Z) = \emptyset$, car, pour $x \in (X \setminus Z) \setminus \mathrm{Sing}(X \setminus Z)$, la profondeur $\mathrm{prof}_x(\mathcal{O}_X) \geq \dim X \geq n + 1 + \dim Z$, car on a supposé $\mathrm{codim}_X Z \geq n+1$. On peut se réduire au cas $Z = Y$. En effet, l'hypothèse garantit que $H^k(X \setminus Z, \mathcal{O}_X(-L)) \to H^k(X \setminus Y, \mathcal{O}_X(-L))$ est bijectif pour $k < n$ et injectif pour $k = n$ (voir [2] II Theorem 3.6.).

Supposons donc que $Z = Y$, c.-à d. que $\mathrm{prof}\, \mathcal{O}_{X \setminus Z} \geq n + d + 1$. On a choisi L générique, donc en particulier transverse aux strates d' une stratification de Whitney de (X, Z). On a $\dim X \geq n + 1$. Pour $l \gg 0$ on a $H^q(X \setminus Z, \mathcal{O}_X(-L)^l) = 0$, $q < n$, parce que l'on a $\mathrm{prof}\, \mathcal{O}_{X \setminus Z, x} \geq n + d + 1$ pour tout $x \in X \setminus Z$, d'après le théorème 2.1 précédent.

Il reste à démontrer que $H^q(X \setminus Z, \mathcal{O}_X(-L)^l / \mathcal{O}_X(-L)^{l+1}) = 0$, $q < n$, $l \geq 0$.

Mais $\mathcal{O}_X(-L)^l / \mathcal{O}_X(-L)^{l+1}$ un faisceau très ample sur L. On peut donc procéder par récurrence en montrant

$$H^q((X \setminus Z) \cap L, \mathcal{O}_X(-L)^l / \mathcal{O}_X(-L)^{l+1}) = 0$$

pour $q < n$, $l \geq 0$.

Notons que

$$\mathrm{prof}_{\mathrm{Sing}\, X \cap L \setminus Z} \mathcal{O}_{X \cap L \setminus Z} \geq \mathrm{prof}_{\mathrm{Sing}\, X \setminus Z} \mathcal{O}_{X \setminus Z} \geq n$$

et $\dim\, X \cap L \geq n$.

Un corollaire intéressant du Théorème précédent est la généralisation suivante du Théorème de Kodaira (voir e.g. Theorem 1.2 §1 de [5]) ainsi considéré comme le théorème d'annulation de cohomologie associé à notre théorème du type de Lefschetz pour le faisceau structural:

4.4 Corollaire. *Soient X une variété projective complexe, Z un sous-espace fermé, $\mathcal{L}$ un faisceau ample sur X. Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que* $\mathrm{codim}_X Z \geq n+1$, $\mathrm{prof}_{\mathrm{Sing}(X\setminus Z)}\mathcal{O}_{X\setminus Z} \geq n$, $\dim X \geq n$. *Alors*

$$H^q(X \setminus Z, \mathcal{L}^{-1}) = 0$$

pour $q < n$.

Démonstration: Si on suppose que $\mathcal{L}$ est très ample, on peut plonger la variété projective X dans $\mathbb{P}_m$ de telle sorte que $\mathcal{L}$ soit la restriction à X du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_m}(1)$. L'annulation de $H^q(X \setminus Z, \mathcal{L}^{-1})$ équivaut donc à l'annulation de $H^q(X \setminus Z, \mathcal{I})$, où $\mathcal{I}$ est l'déal dans X d'une section hyperplane de X dans $\mathbb{P}_m$. Or cette annulation pour $q < n$ est une conséquence immédiate du Théorème 4.3.

Dans le cas général, on procède de façon analogue à [26] Lemma 1, dans le cas non-singulier. Soit $l \gg 0$ tel que $\mathcal{L}^l$ soit très ample. Fixons un tel entier l. On a dans $H^0(X, \mathcal{L}^l) - \{0\}$ une section σ de diviseur $D := [\sigma]$. Dans le fibré $\pi : L \to X$ défini par $\mathcal{L}$ sur X, la sous-variété X' des points $x \in L$ où $x^l = \sigma(\pi(x)) \in L^l$ est un revêtement cyclique

$$f : X' \to X$$

sur X ramifié le long de D. Localement L est trivial sur X donc

$$\mathrm{prof}_{\mathrm{Sing}(L\setminus\pi^{-1}(Z))}\mathcal{O}_{L\setminus\pi^{-1}(Z)} \geq n+1.$$

Comme X' est donné localement par $s - t^l = 0$ dans L, on a

$$\mathrm{prof}_{\mathrm{Sing}(X'\setminus f^{-1}(Z))}\mathcal{O}_{X'\setminus f^{-1}(Z)} \geq n.$$

On peut donc appliquer le résultat précédent à X' et $f^*(\mathcal{L}^{-1})$ qui est très ample:

$$H^q(X' \setminus f^{-1}(Z), f^*(\mathcal{L}^{-1})) = 0$$

pour $q < n$. Comme f est fini,

$$H^q(X' \setminus f^{-1}(Z), f^*(\mathcal{L}^{-1})) = H^q(X \setminus Z, f_*(f^*(\mathcal{L}^{-1}))).$$

D'autre part f est fini et galoisien et ramifié le long de D, donc la partie invariante de $f_*(f^*(\mathcal{L}^{-1}))$ sous l'action du groupe de Galois est $\mathcal{L}^{-1}$ (comparer avec [26]). Comme la partie invariante de la cohomologie est la cohomologie de la partie invariante du faisceau, on obtient le résultat cherché

$$H^q(X \setminus Z, \mathcal{L}^{-1}) = 0$$

pour $q < n$.

Remarque. Le théorème 4.3 est une conséquence immédiate du corollaire 4.4. Ils sont donc équivalents.

5 Cas des faisceaux cohérents analytiques

On a les analogues analytiques suivants des Théorèmes 4.2 et 4.3:

5.1 Théorème. *Soient X une variété projective, Z un sous-espace algébrique fermé, $\mathcal{S}$ un faisceau analytique cohérent sur X et supposons que* $\operatorname{prof} \mathcal{S}|X \setminus Z \geq n$. *Soit $\mathcal{L}$ un faisceau ample sur X. Alors*

$$H^q(X^{an} \setminus Z^{an}, \mathcal{S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{-l}) = 0$$

pour $q < n - \dim Z - 1$ et $l \gg 0$.

Démonstration. On procède comme dans le cas algébrique. Au lieu de [9] III Lemme 3.1 et [9] XII Cor. 1.4 on utilise [27], [33], [32], [2] II Theorem 3.6 et [2] IV Cor. 3.3, respectivement.

5.2 Théorème. *Soient X une variété projective complexe dans $\mathbb{P}_m$, Z un sous-espace fermé, H un hyperplan dans $\mathbb{P}_m$ qui ne contient aucune composante irréductible de X. Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que* $\operatorname{codim}_X Z \geq n + 1$,

$$\operatorname{prof}_{\operatorname{Sing}(X^{an} \setminus Z^{an})} \mathcal{O}_{X^{an} \setminus Z^{an}} \geq n,$$

$\dim X \geq n$. *Alors*

$$H^q(X^{an} \setminus Z^{an}, \mathcal{O}_{X^{an} \setminus Z^{an}}) \longrightarrow H^q(X^{an} \cap H^{an} \setminus Z^{an}, \mathcal{O}_{X^{an} \cap H^{an} \setminus Z^{an}})$$

est bijectif pour $q < n - 1$ et injectif pour $q = n - 1$.

Démonstration: Au lieu de [9] on utilise [2] IV Theorem 3.1, de plus au lieu du théorème 4.2 on utilise le théorème 5.1 précédent.

On obtient le corollaire suivant qui est aussi obtenu par Y.T. Siu dans [30] (Theorems A and B p. 348) :

5.3 Corollaire. *Soient X une variété projective complexe dans $\mathbb{P}_m$, Z un sous-espace fermé. Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que* $\operatorname{codim}_X Z \geq n + 1$, $\operatorname{prof}_{\operatorname{Sing}(X \setminus Z)} \mathcal{O}_{X \setminus Z} \geq n$, $\dim X \geq n$. *Alors*

$$H^q(X \setminus Z, \mathcal{O}_{X \setminus Z}) \simeq H^q(X^{an} \setminus Z^{an}, \mathcal{O}^{an}_{X \setminus Z})$$

pour $q < n - 1$.

Démonstration: On a un morphisme naturel

$$H^q(X \setminus Z, \mathcal{O}_{X \setminus Z}) \to H^q(X^{an} \setminus Z^{an}, \mathcal{O}_{X \setminus Z}).$$

On procède par récurrence sur $\dim X$. On a $\dim X \geq n$. Pour $\dim X = n$, on a $Z = \emptyset$, l'assertion est donc vraie dans ce cas à cause de GAGA.
Soit donc $\dim X > n$, H un hyperplan générique dans $\mathbb{P}_m$. Alors les hypothèses restent valables pour $X \cap H$ et $Z \cap H$ au lieu de X et Z, respectivement, on peut donc leur appliquer l'hypothèse de récurrence. Avec le Théorème 4.3 (resp. 5.2) on obtient le résultat cherché.
Remarque: On a aussi l'analogue du corollaire 4.4 :

5.4 Corollaire. *Soit X une variété projective complexe dans $\mathbb{P}_m$, Z un sous-espace fermé. Soit $\mathcal{L}$ un faisceau ample sur X. Soit $n \in \mathbb{N}$,* $\operatorname{codim}_X Z \geq n+1$, $\operatorname{prof}_{\operatorname{Sing}(X^{an}\setminus Z^{an})}\mathcal{O}_{X^{an}\setminus Z^{an}} \geq n$, $\dim X \geq n$. *Alors,*

$$H^q(X^{an} \setminus Z^{an}, \mathcal{L}^{-1}) = 0$$

pour $q < n$.

6 Applications au groupe de Picard

On peut appliquer le Théorème 5.2 au groupe de Picard analytique, en utilisant la suite exacte exponentielle:

6.1 Théorème. *Soient X une variété projective complexe dans $\mathbb{P}_m$, Z un sous-espace fermé. Fixons une stratification de Whitney de (X, Z). Soit H un hyperplan dans $\mathbb{P}_m$ qui est transverse aux strates de Z.*
a) Supposons

$$\operatorname{pcr}(X^{an} \setminus (Z \cup H)^{an}) \geq 3,\ \operatorname{codim}_X Z \geq 3,\ \operatorname{prof}_{\operatorname{Sing} X^{an}\setminus Z^{an}}\mathcal{O}_{X^{an}\setminus Z^{an}} \geq 2.$$

Alors la flèche $\operatorname{Pic}_{(an)}(X^{an} \setminus Z^{an}) \longrightarrow \operatorname{Pic}_{(an)}(X^{an} \cap H^{an} \setminus Z^{an})$ *est injective.*
b) Supposons

$$\operatorname{pcr}_Z(X^{an} \setminus (Z \cup H)^{an}) \geq 4, \operatorname{codim}_X Z \geq 4, \operatorname{prof}_{\operatorname{Sing} X^{an}\setminus Z^{an}}\mathcal{O}_{X^{an}\setminus Z^{an}} \geq 3.$$

Alors $\operatorname{Pic}_{(an)}(X^{an} \setminus Z^{an}) \simeq \operatorname{Pic}_{(an)}(X^{an} \cap H^{an} \setminus Z^{an})$.

Démonstration: Si $\operatorname{pcr}_Z(X^{an} \setminus (Z \cup H)^{an}) \geq n$, le théorème de type de Lefschetz sur les sections hyperplanes (voir par exemple [20]) nous dit que

$$H^k(X^{an} \setminus Z^{an}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(X^{an} \cap H^{an} \setminus Z^{an}, \mathbb{Z})$$

est bijectif pour $k \leq n-2$ et injectif pour $k = n-1$, car on a supposé que H est transverse aux strates de Z. D'autre part on dispose du Théorème 5.2.

La suite exacte de l'exponentielle

$$0 \to \mathbb{Z}_{X^{an}\setminus Z^{an}} \to \mathcal{O}_{X^{an}\setminus Z^{an}} \to \mathcal{O}^*_{X^{an}\setminus Z^{an}} \to 0$$

et la suite analogue pour l'espace $X^{an} \cap H^{an} \setminus Z^{an}$ conduisent à des suites exactes longues de cohomologie que l'on compare. On conclut par le lemme des cinq que

$$H^1(X^{an} \setminus Z^{an}, \mathcal{O}^*_{X^{an}\setminus Z^{an}}) \to H^1(X^{an} \cap H^{an} \setminus Z^{an}, \mathcal{O}^*_{X^{an}\cap H^{an}\setminus Z^{an}})$$

est injectif dans le cas a) (resp. bijectif dans le cas b)).
Remarque: Sous les hypothèses qu'on a faites on a $\operatorname{Pic}(X \setminus Z) \simeq \operatorname{CaCl}(X^{an} \setminus Z^{an}) \simeq \operatorname{Pic}_{(an)}(X^{an} \setminus Z^{an})$ et l'énoncé analogue pour $X \cap H \setminus Z$ d'après le Lemme 3.1. On peut comparer ce résultat avec le Théorème 1.2 où il y a une hypothèse de transversalité plus forte.

6.2 Corollaire. *Soient X une variété projective complexe dans $\mathbb{P}_m$, Z un sous-espace fermé, H un hyperplan dans $\mathbb{P}_m$.*
a) Soit $X^{an} \setminus Z^{an}$ localement intersection complète de dimension $n \geq 3$ et supposons que $\operatorname{codim}_{X\cap H} Z \cap H \geq 3$, $\operatorname{codim}_X \operatorname{Sing} X \geq 2$. *Alors la flèche*

$$\operatorname{Pic}_{(an)}(X^{an} \setminus Z^{an}) \longrightarrow \operatorname{Pic}_{(an)}(X^{an} \cap H^{an} \setminus Z^{an})$$

est injective.
b) Soit $X^{an} \setminus Z^{an}$ localement intersection complète de dimension $n \geq 4$, $\operatorname{codim}_{X\cap H} Z \cap H \geq 4$, $\operatorname{codim}_X \operatorname{Sing} X \geq 3$. *Alors*

$$\operatorname{Pic}_{(an)}(X^{an} \setminus Z^{an}) \simeq \operatorname{Pic}_{(an)}(X^{an} \cap H^{an} \setminus Z^{an}).$$

Démonstration: On peut supposer que $X^{an} \setminus Z^{an}$ est connexe. L'énoncé est trivial si $X^{an} \setminus Z^{an}$ est contenu dans H. Nous pouvons donc supposer que:

$$\dim(X^{an} \setminus Z^{an}) \cap H = \dim(X^{an} \setminus Z^{an}) - 1.$$

Choisissons un sous-espace projectif générique L de H tel que $\dim L = m - n + 2$ (resp. $\dim L = m - n + 3$). Alors $L \cap Z = \emptyset$. Le Théorème 6.1 précédent nous donne dans le cas a) (resp. b))

$$\operatorname{Pic}_{(an)}(X^{an} \setminus Z^{an}) \to \operatorname{Pic}_{(an)}(X^{an} \cap L \setminus Z^{an})$$

et

$$\operatorname{Pic}_{(an)}(X^{an} \cap H \setminus Z^{an}) \to \operatorname{Pic}_{(an)} X^{an} \cap L \setminus Z^{an})$$

sont injectifs (resp. bijectifs), d'où le résultat.

Rappelons qu'il n'y a pas de différence entre le groupe de Picard algébrique et analytique dans ce cas. Ce corollaire se compare donc avec le Corollaire 1.5.

En fait, on obtient à partir du Corollaire 6.2 :

6.3 Corollaire. *Soient X une variété projective complexe dans $\mathbb{P}_m$, H un hyperplan dans $\mathbb{P}_m$. Soit X^{an} localement une intersection complète de dimension ≥ 4 et supposons que* $\operatorname{codim}_X \operatorname{Sing} X \geq 3$. *Alors*

$$\operatorname{Pic} X \simeq \operatorname{Pic}(X \cap H).$$

En comparaison avec Corollaire 1.5 avec $Z = \emptyset$ il n'y a plus besoin de condition de transversalité!

Il y a une variante du Théorème 6.1 sans hypothèse de transversalité:

6.4 Théorème. *Soient X une variété projective complexe dans $\mathbb{P}_m$, Z un sous-espace fermé, H l'hyperplan défini par $z_0 = 0$, $U := \{(z_0 : \ldots : z_m) \in X^{an} \mid |z_1|^2 + \ldots + |z_m|^2 \leq R|z_0|^2\}$ avec $R > 0$; il s'agit d'un voisinage de $X^{an} \cap H^{an}$ dans X^{an}.*
a) Supposons $\operatorname{pcr}(X^{an} \setminus Z^{an}) \geq 3$, $\operatorname{prof}_{Z^{an}} \mathcal{O}_{X^{an}} \geq 3$, $\operatorname{prof} \mathcal{O}_{X^{an} \setminus H^{an}} \geq 2$. *Alors la flèche*

$$\operatorname{Pic}_{(an)}(X^{an} \setminus Z^{an}) \longrightarrow \operatorname{Pic}_{(an)}(U \setminus Z^{an})$$

est injective.
b) Supposons que $\operatorname{pcr} Z(X^{an} \setminus Z^{an}) \geq 4$, $\operatorname{prof}_{Z^{an}} \mathcal{O}_{X^{an}} \geq 4$, $\operatorname{prof} \mathcal{O}_{X^{an} \setminus H^{an}} \geq 3$. *Alors*

$$\operatorname{Pic}_{(an)}(X^{an} \setminus Z^{an}) \simeq \operatorname{Pic}_{(an)}(U \setminus Z^{an}).$$

Démonstration: b) $H^k_c(X^{an} \setminus U, \mathcal{O}_{X^{an}}) = 0$ pour $k \leq 2$ parce que $X^{an} \setminus U$ est de Stein et $X^{an} \setminus H^{an}$ est de profondeur ≥ 3, voir [2] I Theorem 3.6. La flèche $H^k(X^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}}) \longrightarrow H^k(U, \mathcal{O}_{X^{an}})$ est donc bijective pour $k = 1$ et injective pour $k = 2$. À cause de l'hypothèse sur la profondeur par rapport à Z^{an} on a $H^k(X^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}}) \simeq H^k(X^{an} \setminus Z^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}})$, $k = 1, 2$, et un énoncé pareil pour U au lieu de X^{an}. On obtient le reste à cause de la suite exacte exponentielle en utilisant un théorème de Zariski-Lefschetz qui nous donne

$$H^k(X^{an} \setminus Z^{an}, \mathbb{Z}) \simeq H^k(U \setminus Z^{an}, \mathbb{Z})$$

pour $k = 0, 1, 2$ (voir e.g. Cor. 4.3.8 de [19], avec la définition de pcr donnée ci-dessus et le fait que U est un bon voisinage de $X^{an} \cap H^{an}$).

a) La démonstration de a) est analogue à celle de b).

Remarque. En utilisant [14] on peut donner des hypothèses plus faibles que celles du théorème précédent en ne supposant que prof $\mathcal{O}_{X^{an} \setminus (H^{an} \cup Z^{an})} \geq 2$ (resp. prof $\mathcal{O}_{X^{an} \setminus (H^{an} \cup Z^{an})} \geq 3$).

7 Approche algébrique

Dans cette section nous reprenons le point de vue de A. Grothendieck développé dans [9]. On considèrera la complétion $\hat{X}$ du schéma projectif X le long d'une section hyperplane $X \cap H$ (voir [21] (Chap. II §9)

Le point de vue de A. Grothendieck consiste à établir les isomorphismes :

$$\lim_{\rightarrow} \mathrm{Pic}(U) \simeq \mathrm{Pic}(\hat{X} \setminus \hat{Z}) \simeq \mathrm{Pic}(X \cap H \setminus Z)$$

pour des sous-variétés projectives X de $\mathbb{P}_N(k)$, où Z une partie fermé de X, H un hyperplan de $\mathbb{P}_N(k)$ satisfaisant certaines hypothèses et U parcourt le système inductif des voisinages de Zariski ouverts de $X \cap H \setminus Z$ dans $X \setminus Z$.

La première comparaison est donnée par le théorème suivant (comparer au corollaire 3.6 de l'exp. XII de [9]):

7.1 Théorème. *Soient $X \subset \mathbb{P}_N(k)$ un sous-schéma projectif sur le corps k, Z une partie fermée de X, H un hyperplan de $\mathbb{P}_N(k)$ dont l'équation donne un élément non-diviseur de zéro sur X. Soit $\hat{X}$ la complétion de X le long de $X \cap H$. Supposons que:*

$$\dim S_\ell(\mathcal{O}_{X \cap H \setminus Z}) \leq \ell - 2, \text{ pour tout } \ell \leq 2 + \dim Z \cap H.$$

Alors

$$\lim_{\rightarrow} \mathrm{Pic}\,(U) \simeq \mathrm{Pic}\,(\hat{X} \setminus \hat{Z}),$$

où U parcourt le système inductif des voisinages ouverts de $X \cap H \setminus Z$ dans $X \setminus Z$.

En fait ce théorème est une conséquence immédiate du théorème suivant inspiré par le Corollaire 3.4 de [9] Exposé XII, (voir aussi dans le cas du groupe de Picard le point 2 de la démonstration du Theorem 3.1 de [22] Chapter 4 §3):

7.2 Théorème. *Soient $X \subset \mathbb{P}_N(k)$ un sous-schéma projectif sur le corps k, Z une partie fermée de X, H un hyperplan de $\mathbb{P}_N(k)$ dont l'équation donne un élément non-diviseur de zéro sur X. Soit $\hat{X}$ la complétion de X le long de $X \cap H$. Supposons que:*

$$\dim S_\ell(\mathcal{O}_{X\cap H\setminus Z}) \leq \ell - 2, \ \textit{pour tout } \ell \leq 2 + \dim Z \cap H.$$

Alors

$$\lim_{\rightarrow} Vect\,(U) \simeq Vect\,(\hat{X} \setminus \hat{Z}) \simeq \lim_{\leftarrow} Vect\,(X_n \setminus Z_n),$$

où U parcourt le système inductif des voisinages ouverts de Zariski de $X \cap H \setminus Z$ dans $X \setminus Z$, $Vect\,(U)$ est le semi-anneau des classes d'isomorphismes des fibrés k-vectoriels algébriques sur U et X_n le voisinage infinitésimal d'ordre n de $X \cap H$ dans X.

Démonstration. Rappelons que:

$$S_\ell(\mathcal{O}_{X\cap H\setminus Z}) := \{x \text{ point fermé de } X \cap H \setminus Z \,|\, \mathrm{prof}\, \mathcal{O}_{X\cap H\setminus Z,x} \leq \ell\}.$$

Par ailleurs on a

$$\dim S_\ell(\mathcal{O}_{X\cap H\setminus Z}) \leq \ell - 2, \ \text{pour tout } \ell \leq 2 + \dim Z \cap H.$$

Donc sur un voisinage ouvert U' de $X \cap H \setminus Z$ dans $X \setminus Z$ on a

$$\dim S_{\ell+1}(\mathcal{O}_{U'}) \leq \ell - 2, \ \text{pour tout } \ell \leq 2 + \dim Z \cap H.$$

On peut donc supposer que sur un voisinage ouvert U' de $X \cap H \setminus Z$ dans $X \setminus Z$, on a:

$$\dim S_\ell(\mathcal{O}_{U'}) \leq \ell - 3, \ \text{pour tout } \ell \leq 3 + \dim Z \cap H.$$

Donc avec $\ell = 1$ on a $\mathrm{prof}\, \mathcal{O}_{U'} \geq 2$ et, avec $Z' = X \setminus U'$ et $Z'' := Z' \cup S_m(\mathcal{O}_{X\setminus Z'})$, où

$$m := \dim(Z \cap H) + 3,$$

par définition (cf. §1), on a:

$$\mathrm{prof}_{Z''\setminus Z'}\, \mathcal{O}_U \geq 2.$$

Donc la Proposition 2.6 de [15] montre que

$$\mathcal{H}^i_{Z''\setminus Z'}(\mathcal{O}_U) = 0$$

pour $i \leq 1$.

On obtient alors l'injectivité de $Vect\,(U) \to Vect\,(X \setminus Z'')$. En effet, soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux fibrés vectoriels sur U dont les restrictions à $X \setminus Z''$ soient isomorphes. Le fibré $Hom(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ des morphismes de fibrés k-vectoriels a donc une section sur $X \setminus Z''$ qui se prolonge uniquement à U. Pour cela, on considère la suite exacte:

$$H^0_{Z''\setminus Z'}(X \setminus Z', Hom\,(\mathcal{E}.\mathcal{E}')) \to \Gamma(X \setminus Z', Hom\,(\mathcal{E}.\mathcal{E}')) \to$$

$$\to \Gamma(X \setminus Z'', Hom\,(\mathcal{E}.\mathcal{E}')) \to H^1_{Z''\setminus Z'}(X \setminus Z', Hom\,(\mathcal{E}.\mathcal{E}')) \to \dots$$

Il suffit d''etablir que $H^i_{Z''\setminus Z'}(X \setminus Z', Hom\,(\mathcal{E}.\mathcal{E}')) = 0$, pour $i = 0, 1$.

Comme $Hom\,(\mathcal{E}.\mathcal{E}')$ est localement libre, $\mathcal{H}^i_{Z''\setminus Z'}(\mathcal{O}_U)=0$, pour $i\leq 1$, implique:

$$\mathcal{H}^i_{Z''\setminus Z'}(\,Hom\,(\mathcal{E}.\mathcal{E}'))=0,$$

pour $i\leq 1$.

Comme on a une suite spectrale (cf. [9], exposé 1, théorème 2.6):

$$H^p(X\setminus Z',\mathcal{H}^q_{Z''\setminus Z'}(\,Hom\,(\mathcal{E}.\mathcal{E}'))\Rightarrow H^{p+q}_{Z''\setminus Z'}(X\setminus Z',\,Hom\,(\mathcal{E}.\mathcal{E}')),$$

on obtient le résultat cherché avec $p,q\leq 1$.

On a donc un isomorphisme:

$$\Gamma(X\setminus Z',\,Hom\,(\mathcal{E}.\mathcal{E}'))\to\Gamma(X\setminus Z'',\,Hom\,(\mathcal{E}.\mathcal{E}')).$$

Donc tout homomorphisme sur $X\setminus Z$" s'étend uniquement en un homorphisme sur $X\setminus Z'$. En choisissant l'isomorphisme inverse de $\mathcal{E}'$ sur $\mathcal{E}$ sur $X\setminus Z$", l'isomorphisme sur $X\setminus Z$" entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ s'étend sur $X\setminus Z'$ uniquement en un isomorphisme. Ceci donne l'injectivité $Vect\,(U)\to Vect\,(X\setminus Z'')$.

Montrons maintenant l'injectivité de $Vect\,(X\setminus Z'')$ dans $\lim\limits_{\leftarrow} Vect\,(X_n\setminus Z''_n)$. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux fibrés vectoriels sur $X\setminus Z''$ tels que $\mathcal{E}|X_n\setminus Z''_n$ et $\mathcal{E}'|X_n\setminus Z''_n$ soient isomorphes pour tout $n\geq 0$. Par définition de Z'', on a $\mathrm{prof}(Hom(\mathcal{E},\mathcal{E}')|X\setminus Z'')\geq \dim\,(Z\cap H)+4\geq \dim\,Z+3$.

D'après le théorème 4.2, on a:

$$H^i(X\setminus Z'',Hom(\mathcal{E},\mathcal{E}')\otimes_{\mathcal{O}_X\setminus Z''}\mathcal{L}^{-n}|X\setminus Z'')=0,$$

pour $n\gg 0$ et $i=0,1$ avec un faisceau ample $\mathcal{L}$ sur X.

Comme H est défini localement par une fonction qui n'est pas localement diviseur de zéro sur X, on peut remplacer $\mathcal{L}^{-1}$ par l'idéal $\mathcal{I}$ qui définit H. On a donc:

$$H^i(X\setminus Z'',\mathcal{I}^nHom(\mathcal{E},\mathcal{E}'))=0,$$

pour $n\gg 0$ et $i=0,1$. Ceci donne:

$$H^0(X\setminus Z'',Hom(\mathcal{E},\mathcal{E}'))\simeq H^0(X_n\setminus Z''_n,Hom(\mathcal{E},\mathcal{E}')),$$

en considérant la suite exacte de faisceaux:

$$0\to\mathcal{I}^nHom(\mathcal{E},\mathcal{E}')\to Hom(\mathcal{E},\mathcal{E}')\to Hom(\mathcal{E},\mathcal{E}')/\mathcal{I}^nHom(\mathcal{E},\mathcal{E}')\to 0.$$

On a donc une application injective $Vect\,(U)\to\lim\limits_{\leftarrow} Vect\,(X_n\setminus Z''_n)$. Comme ceci factorise par $Vect\,(U)\to\lim\limits_{\leftarrow} Vect\,(X_n\setminus Z_n)$, cette dernière application est aussi injective. Donc:

$$\lim_{\rightarrow} Vect\,(U)\to\lim_{\leftarrow} Vect\,(X_n\setminus Z_n)$$

est injective. Ceci donne immédiatement l'injection $\lim\limits_{\rightarrow} Vect\,(U)\to Vect\,(\hat{X}\setminus\hat{Z})$.

Démontrons maintenant la surjectivité de $\lim\limits_{\rightarrow} Vect\,(U)\to Vect\,(\hat{X}\setminus\hat{Z})$. Pour cela nous allons démontrer qu'un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur $\hat{X}\setminus\hat{Z}$ définit un fibré vectoriel sur un voisinage de $X \cap H \setminus Z$. Pour cela il est pratique de passer au cône affine $\tilde{X}$ de X et au complété $\hat{\tilde{X}}$ le long de $\tilde{H} \cap \tilde{X}$ de $\tilde{X}$.

Le fibré vectoriel $\mathcal{E}$ induit un faisceau $\tilde{\mathcal{E}}$ sur $\hat{\tilde{X}} \setminus \hat{\tilde{Z}}$. Soit $\hat{\tilde{j}}$ l'inclusion de $\hat{\tilde{X}} \setminus \hat{\tilde{Z}}$ dans $\hat{\tilde{X}}$. D'après le théorème 2.2 de [9], le faisceau $\mathcal{T} := \hat{\tilde{j}}_* \mathcal{E}$ est cohérent. D'après le Théorème 10.10.2 de [11], les sections globales $T := \Gamma(\hat{\tilde{X}}, \mathcal{T})$ forment donc un module de type fini sur l'anneau $A := \Gamma(\hat{\tilde{X}}, \mathcal{O}_{\hat{\tilde{X}}})$.

Comme $\hat{\tilde{X}}$ est le complété d'un cône, on a une action de $k[t, t^{-1}]$ sur T induite par l'action de $k[t, t^{-1}]$ sur $\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}/\mathcal{I}^n \mathcal{O}_{\tilde{X}})$. Le sous-groupe de T où la multiplication par t est donnée par $t \mapsto t^n$ est noté T^n. On a aussi une section à l'inclusion $T^n \subset T$. En effet, si $\tilde{\mathcal{I}}$ définit la section hyperplane sur $\tilde{X}$, $\mathcal{T}/\hat{\tilde{\mathcal{I}}}^k \mathcal{T}$ est un $\mathcal{O}_{\hat{\tilde{X}}}$-module cohérent, donc un $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$-module cohérent, puisque la complétion est faite le long de $\tilde{H}$. On obtient donc:

$$T/\hat{\tilde{I}}^k T \simeq \oplus_{n \in \mathbb{Z}} (T/\hat{\tilde{I}}^k T)^n.$$

On obtient donc une section naturelle de l'inclusion $(T/\hat{\tilde{I}}^k T)^n$ dans $T/\hat{\tilde{I}}^k T$. Par passage à la limite projective, on a donc une flèche de T dans T^n qui est la section cherchée.

Soient $g_1, \ldots, g_m$ les générateurs du A-module T. Pour tout $k \geq 1$, comme $T/\hat{\tilde{I}}^k T \simeq \oplus_{n \in \mathbb{Z}} (T/\hat{\tilde{I}}^k T)^n$, il existe un ensemble fini M tel que, pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus M$ l'image de g_i soit 0 dans $(T/\hat{\tilde{I}}^k T)^n$ pour $1 \leq i \leq m$. Soient $\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_m$ les images de $g_1, \ldots, g_m$ dans l'application de T dans $\oplus_{n \in M} T^n$. Remarquons que $g_1, \ldots, g_m$ et $\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_m$ ont les mêmes images respectives dans $T/\hat{\tilde{I}}^k T$.

Soit $x \in \tilde{X} \cap \tilde{H}$. Les éléments $(\tilde{g}_1)_x, \ldots, (\tilde{g}_m)_x$ représentent des générateurs du $\mathcal{O}_{\tilde{X} \cap \tilde{H}, x}$-module $(\mathcal{T}/\hat{\tilde{\mathcal{I}}}\mathcal{T})_x$, en considérant $k = 1$. Le lemme de Nakayama montre que ces générateurs de $(\mathcal{T}/\hat{\tilde{\mathcal{I}}}\mathcal{T})_x$ donnent des générateurs du $\mathcal{O}_{\hat{\tilde{X}}, x}$-module $\mathcal{T}_x$. En effet $\mathcal{T}_x/(< \tilde{g_1})_x, \ldots, \tilde{g_m})_x > + \hat{\tilde{\mathcal{I}}}_x \mathcal{T}_x) = 0$, et $\hat{\tilde{\mathcal{I}}}_x$ est contenu dans l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\hat{\tilde{X}}, x}$.

On a donc un épimorphisme de faisceaux:

$$(\mathcal{O}_{\hat{\tilde{X}}})^m \to \mathcal{T}$$

Le théorème de [21] Chapter II 9.7 permet d'établir que $(\tilde{g}_1)_x, \ldots, (\tilde{g}_m)_x$ donnent des générateurs du A-module T.

On peut supposer que les $(\tilde{g}_1)_x, \ldots, (\tilde{g}_m)_x$ sont homogènes. Comme $B := \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ est gradué, les $(\tilde{g}_1)_x, \ldots, (\tilde{g}_m)_x$ engendrent un sous B-module gradué T' de $\oplus_{n \in \mathbb{Z}} T^n$. D'après [21] Chapter II 5.11, le faisceau $\mathcal{T}'$ correspondant définit une extension cohérente $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ à $X = Proj B$.

Dans un voisinage U de $\hat{X} \setminus \hat{Z}$ dans $X \setminus Z$, le faisceau $\mathcal{F}$ est localement libre (voir [11] Chapitre I 10.8.15).

Ce raisonnement donne la surjectivité de $\varinjlim Vect\,(U) \to Vect\,(\hat{X} \setminus \hat{Z})$.

La surjectivité de $Vect\,(\hat{X} \setminus \hat{Z})$ sur $\varprojlim Vect\,(X_n \setminus Z_n)$ est obtenue e.g. avec [11] Chapitre I 10.11.10.

On a cité ci-dessus des résultats énoncés pour $k = \mathbb{C}$, mais qui sont vrais pour k arbitraire.

En particulier on a en plus :

7.3 Corollaire. *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 7.1, on a :*

$$\lim_{\rightarrow} \mathrm{Pic}\,(U) \simeq Pic\,(\hat{X} \setminus \hat{Z}) \simeq \lim_{\leftarrow} \mathrm{Pic}\,(X_n \setminus Z_n).$$

Remarque: En utilisant un résultat de G. Faltings (voir [6] Corollary 3), on peut établir que $\mathrm{CaCl}(\hat{X} \setminus \hat{Z}) \simeq \mathrm{Pic}(\hat{X} \setminus \hat{Z})$ dans le cas où X est géométriquement intègre. Pour cela on utilise les suites exactes de cohomologie associées aux suites exactes de faisceaux :

$$0 \to \mathcal{O}^*_{\hat{X}\setminus\hat{Z}} \to \mathcal{M}^*_{\hat{X}\setminus\hat{Z}} \to \mathcal{M}^*_{\hat{X}\setminus\hat{Z}}/\mathcal{O}^*_{\hat{X}\setminus\hat{Z}} \to 0$$

$$0 \to \mathcal{O}^*_U \to \mathcal{M}^*_U \to \mathcal{M}^*_U/\mathcal{O}^*_U \to 0$$

ce qui nous donne

$$\begin{array}{ccccc}
\lim\limits_{\rightarrow} H^0(U, \mathcal{O}^*_U) & \to & \lim\limits_{\rightarrow} H^0(U, \mathcal{M}^*_U) & \to & \lim\limits_{\rightarrow} H^0(U, \mathcal{M}^*_U/\mathcal{O}^*_U) \to \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^0(\hat{X} \setminus \hat{Z}, \mathcal{O}^*_{\hat{X}\setminus\hat{Z}}) & \to & H^0(\hat{X} \setminus \hat{Z}, \mathcal{M}^*_{\hat{X}\setminus\hat{Z}}) & \to & H^0(\hat{X} \setminus \hat{Z}, \mathcal{M}^*_{\hat{X}\setminus\hat{Z}}/\mathcal{O}^*_{\hat{X}\setminus\hat{Z}}) \to \\
& & & & \\
& \to & \lim\limits_{\rightarrow} H^1(U, \mathcal{O}^*_U) & \to & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow \\
& \to & H^1(\hat{X} \setminus \hat{Z}, \mathcal{O}^*_{\hat{X}\setminus\hat{Z}}) & \to & H^1(\hat{X} \setminus \hat{Z}, \mathcal{M}^*_{\hat{X}\setminus\hat{Z}})
\end{array}$$

La deuxième flèche verticale est un isomorphisme pour le faisceau $\mathcal{M}$ d'après [6]. On en déduit l'isomorphisme pour le sous-faisceau $\mathcal{M}^*$. On conclut en utilisant le lemme des cinq.

8 Application

En utilisant des hypothèses et des techniques transcendantes, nos résultats conduisent au théorème suivant (voir [16] Théorème 5.1 dans le cas projectif):

8.1 Théorème. *Soient X une sous-variété projective complexe de $\mathbb{P}_m$, Z un sous-ensemble algébrique fermé de X, H un hyperplan de $\mathbb{P}_m$. Supposons que H ne contienne aucune composante irréductible de X et soit transverse à une stratification de Whitney donnée $\mathcal{S}$ de Z dans $\mathbb{P}_m$,* $\mathrm{codim}_{X\cap H} Z \cap H \geq 4$ *et*

$$\mathrm{pcr}(X^{an} \setminus Z^{an}) \geq 4,\ \mathrm{prof}_{\,\mathrm{Sing}(X\cap H\setminus Z)}\mathcal{O}_{X\cap H\setminus Z} \geq 3,\ \mathrm{prof}_{\,\mathrm{Sing}(X\setminus Z)}\mathcal{O}_{X\setminus Z} \geq 3.$$

Alors:

$$\mathrm{Pic}\,(X \setminus Z) \simeq \mathrm{Pic}\,(X \cap H \setminus Z).$$

Démonstration. Reprenons les notations de 7.1 et 7.2. Nous avons

$$\lim_{\rightarrow} \mathrm{Pic}\,(U) \simeq \lim_{\leftarrow} \mathrm{Pic}\,(X_n \setminus Z_n).$$

Par conséquent, comme les voisinages ouverts de $X \cap H \setminus Z$ dans $X \setminus Z$ sont de la forme $X \setminus Z'$ où Z' est un sous-ensemble algébrique fermé de X tel que $Z \subset Z' \subset X$ et $Z \cap H = Z' \cap H$, il nous suffira de démontrer que

1. pour tous les fermés Z' de X tels que $Z \subset Z' \subset X$ et $Z \cap H = Z' \cap H$, $\mathrm{Pic}\,(X \setminus Z) \simeq \mathrm{Pic}\,(X \setminus Z')$;

2. pour tout $n \geq 1$, $\mathrm{Pic}\,(X_n \setminus Z_n) \simeq \mathrm{Pic}\,(X_{n+1} \setminus Z_{n+1})$.

Preuve de 1. Remarquons que X est normal (voir par exemple [16] Lemma 2.2) donc, pour tous les fermés Z' de X tels que $Z \subset Z' \subset X$ et $Z \cap H = Z' \cap H$, l'homomorphisme $\mathrm{Pic}\,(X \setminus Z) \to \mathrm{Pic}\,(X \setminus Z')$ est injectif par un raisonnement analogue à celui donné pour les fibrés vectoriels dans la démonstration du Théorème 7.2.

Maintenant considérons un élément $[D']$ de $\mathrm{Pic}\,(X \setminus Z')$ et un diviseur de Cartier D' qui le représente. Soit $\overline{D}$ la fermeture dans $X \setminus Z$ du diviseur de Weil D associé à D'. Nous devons démontrer que $\overline{D}$ est le diviseur de Weil associé à un diviseur de Cartier de $X \setminus Z$. Comme dans la section §1, il nous faut établir que le faisceau $(\mathcal{O}_{X\setminus Z})(\overline{D})$ est localement libre sur $X \setminus Z$. Par platitude fidèle cela revient à montrer que $(\mathcal{O}_{X^{an}\setminus Z^{an}})(\overline{D}^{an})$ est localement libre.

Pour cela considérons S le sous-espace des points de $X \cap H$ où H n'intersecte pas stratification de Whitney $\mathcal{S}$ de X transversalement. Ce sous-espace est un fermé de Zariski dans X et par hypothèse $S \cap Z = \emptyset$.

Nous allons recouvrir $X^{an} \cap H^{an}$ par deux ouverts U_1 et U_2 de X^{an}, tels que les restrictions de $(\mathcal{O}_{X^{an}\setminus Z^{an}})(\overline{D}^{an})$ à U_1 et U_2 soient localement libres.

En fait U_1 est un voisinage tubulaire au sens stratifié de $X^{an} \cap H^{an} \setminus S$ dans X^{an}. L'ouvert U_2 est $X^{an} \setminus Z'^{an}$. Clairement l'ouvert $U_1 \cup U_2$ contient $X^{an} \cap H^{an}$. Par hypothèse la restriction de $(\mathcal{O}_{X^{an}\setminus Z^{an}})(\overline{D}^{an})$ à U_2 est inversible.

Comme dans la démonstration du Théorème 1.2, appelons Σ le sous-espace de $X \setminus Z$ des points au voisinage desquels le faisceau $(\mathcal{O}_{X^{an}\setminus Z^{an}})(\overline{D}^{an})$ n'est pas localement libre. Le même raisonnement conduit à $U_1 \cap \Sigma = \emptyset$. Comme $U_1 \cup U_2$ est un voisinage ouvert de $X^{an} \cap H^{an}$ dans X^{an}, on en déduit que Σ est un ensemble fini. En terminant comme dans la démonstration du Théorème 1.2 on obtient que le faisceau $(\mathcal{O}_{X^{an}\setminus Z^{an}})(\overline{D}^{an})$ est inversible.

Preuve de 2. Soit $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_m}$ qui définit H, alors la restriction de $\mathcal{I}$ à X engendre un faisceau I sur $\mathcal{O}_X$, tel que I^{-1} soit ample sur X, et $(I \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_{X\cap H}))^{-1}$ est un faisceau ample $\mathcal{L}$ sur $X \cap H$.

Si l'on suppose que H ne contienne aucune composante irréductible de X, comme X est réduit, on a:

$$I^n / I^{n+1} \simeq I^n \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_{X\cap H})$$

qui est donc $\mathcal{L}^{-n}$.

Comme dans [9] (exposé XI §1(1,1)), avec l'isomorphisme précédent, on a la suite exacte

$$0 \to I^n \otimes \mathcal{O}_{X\cap H} \to \mathcal{O}^*_{X_{n+1}} \to \mathcal{O}^*_{X_n} \to 0.$$

Pour démontrer 2, il suffit de démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$H^k(X \cap H, \mathcal{L}^{-n}) = 0, \text{ pour } k = 1, 2,$$

qui est conséquence du Corollaire 4.4 car $\dim X \geq 4$.

Ceci termine la démonstration de 8.1.

Remarque. Dans [16] (Theorem 5.1) nous donnons un théorème analogue, mais avec l'hypothèse $Z = \emptyset$. Ce dernier résultat est en fait conséquence du Corollaire 3.2 de l'exp. XII de [9]. La différence essentielle de nos résultats avec celui de A. Grothendieck est que l'hypothèse de parafactorialité de Grothendieck est remplacée dans ce cas sur le corps des complexes par des hypothèses topologiques et analytiques qui l'impliquent.

References

[1] D.Anapura, D.B.Jaffe: On Kodaira Vanishing for Singular Varieties. Proc. AMS **105** (1989), 911-916.

[2] C. Bănică, O. Stănăşilă, Algebraic methods in the Global Theory of Complex Spaces, John Wiley, London, N.Y., Toronto, 1976.

[3] P. Deligne: Théorie de Hodge II. Publ. Math. IHES **40**.

[4] P. Deligne, L.Illusie: Relèvement modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham, Inv. Math. **89**, 247-270 (1987). DOI: 10.1007/BF01389078

[5] H. Esnault, E. Viehweg, Lectures on vanishing theorem, DMV Seminar, 20. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

[6] G. Faltings: A contribution to the theory of formal meromorphic functions, Nagoya Math. J. **77** (1980), 99 - 106.

[7] G.Fischer, Complex Analytic Geometry. Lecture Notes in Math. **538**. Springer: Heidelberg 1976.

[8] J. Frisch, J. Guenot: Prolongement de faisceaux analytiques cohérents. Invent. Math. **7**, 321-343 (1969). DOI: 10.1007/BF01425539

[9] A. Grothendieck, Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA II). North-Holland: Amsterdam 1968.

[10] A. Grothendieck - J. Dieudonné, Eléments de Géométrie Algébrique IV, 4ème partie, Pub. Math. IHES **32** (1967)

[11] A. Grothendieck - J. Dieudonné, Eléments de Géométrie Algébrique I, Springer, New York (1971).

[12] M.Goresky, R. MacPherson, Stratified Morse Theory, Springer-Verlag.

[13] R.C.Gunning, H.Rossi, Analytic functions of several complex variables. Prentice Hall: Englewood Cliffs 1965.

[14] H.A. Hamm: A theorem of Lefschetz-Zariski type for coherent analytic sheaves, preprint.

[15] H.A. Hamm: Extension de fibrés vectoriels et profondeur, preprint.

[16] H.A.Hamm, Lê D. T.: A Lefschetz theorem on the Picard group of complex projective varieties, pp. 640-660 in Singularities in Geometry and Topology, published by J.P. Brasselet, J. Damon, Lê D.T. and M. Oka, World Sc. Pub. 2007.

[17] H.A.Hamm, Lê D. T.: On the Picard group for non-complete algebraic varieties, Singularités Franco-Japonaises, Sém. Congr. **10**, 71-86, Soc. Math. Fr., Paris 2005.

[18] H.A.Hamm, Lê D. T.: Vanishing theorems for constructible sheaves. I. J. Reine Angew. Math. **471** (1996), 115–138.

[19] H.A.Hamm, Lê D. T.: Vanishing theorems for constructible sheaves. II. Kodai Math. J. **21** (1998), 208-247. DOI: 10.2996/kmj/1138043875

[20] H.A.Hamm, Lê D. T.: Théorèmes d'annulation pour les faisceaux algébriquement constructibles, C. R. Acad. Sci. Paris Série I Math. **327** (1998), no. 8, 759–762.

[21] R. Hartshorne, Algebraic geometry. Springer: New York (1977).

[22] R. Hartshorne, Ample Subvarieties of Algebraic Varieties. Springer Lecture Notes in Math. **156** (1970).

[23] S. Iitaka, Algebraic Geometry: an introduction to Birational Geometry of Algebraic Varieties, GTM **76**, Springer, New York-Heidelberg-Berlin 1982.

[24] L.Kaup, B.Kaup, Holomorphic functions of several variables. Walter de Gruyter: Berlin 1983.

[25] J. Mather, Notes on topological stability, Mimeographed notes, Harvard, 1970.

[26] C.P. Ramanujam: Some remarks on Kodaira vanishing theorem, J. Indian Math. Soc. **36**, 41-51 (1972); **38** 121-124 (1974).

[27] G.Scheja: Fortsetzungssätze der komplex-analytischen Cohomologie und ihre algebraische Charakterisierung. Math. Ann. **157**, 75-94 (1964). DOI: 10.1007/BF01362668

[28] J.P. Serre, Algèbres locales et multiplicités, Springer Lect. Notes **11**.

[29] B. Shiffman, A. Sommese, Vanishing theorems on complex manifolds, Progress in Mathematics **85**, Birkhäuser (1985).

[30] Y.-T. Siu: Analytic sheaves of local cohomology. Trans. AMS **148**, 347 - 366 (1970). DOI: 10.1090/S0002-9947-1970-0257403-3

[31] Y.T. Siu: Extending coherent analytic sheaves. Ann. of Math. (2) **90**, 108-143 (1969). DOI: 10.2307/1970684

[32] Y.-T. Siu, G. Trautmann, Gap-sheaves and extensions of coherent analytic subsheaves. Springer Lecture Notes in Math. **172** (1971).

[33] G.Trautmann: Ein Kontinuitätssatz für die Fortsetzung kohärenter analytischer Garben. Archiv der Math. **18**, 188-196 (1967). DOI: 10.1007/BF01899645

Mathematisches Institut,
Universität Münster,
Münster, D-48149, BRD
E-Mail: hamm@math.uni-muenster.de

International Center for Theoretical Physics,
Strada Costiera 11, 34151 Trieste, Italy,
E-mail: ledt@ictp.it