Journal *of* Singularities
Volume 7 (2013), 157-189

received 6 February 2013
in revised form 2 July 2013
DOI : 10.5427/jsing.2013.7i

CYCLES ÉVANESCENTS ALGÉBRIQUES ET TOPOLOGIQUES PAR UN MORPHISME SANS PENTE

PH. MAISONOBE

1. Introduction

Soit $f : X \to S$ un morphisme d'espaces analytiques complexes réduits. Lorsque $\dim S > 1$, il n'existe en général pas d'analogue de la fibration de Milnor sur un système fondamental de voisinages $\mathcal{V}_x$ d'un point x de X (on peut penser au cas d'un éclatement). De même, l'image directe d'un complexe borné à cohomologie $\mathbf{C}$-constructible sur X par $f_{|V}$ pour V dans $\mathcal{V}_x$ n'est pas nécessairement $\mathbf{C}$-constructible sur S.

On comprend mieux la géométrie locale du morphisme f si celui-ci est sans éclatement en codimension zéro au sens de J.-P. Henry, M. Merle et C. Sabbah [H-M-S] et si de plus son discriminant est à croisements normaux. Ainsi que l'a montré C. Sabbah [S4], il existe une suite complète d'éclatements locaux dans S qui permet de se ramener à ce cas.

Dans la suite, nous supposerons que X est une variété analytique complexe, que $S = \mathbf{C}^p$ muni de ses coordonnées canonique. Le morphisme f correspond alors à la donnée de p fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_p$ sur X.

Usant de ce stratagème, F. Loeser dans [L] donne ainsi des résultats sur le développement asymptotique des intégrales fibres $\int_{f=t} \phi$ de f et sur les pôles d'intégrales du type

$$\int_X |f_1|^{s_1} \cdots |f_p|^{s_p} \phi \, dx d\overline{x}.$$

Dans [S1], C. Sabbah montre de son côté comment construire des équations fonctionnelles du type Bernstein :

$$b(s_1, \ldots, s_p) m f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p} = P m f_1^{s_1+1} \cdots f_p^{s_p+1},$$

où m est une section d'un $\mathcal{D}_X$-Module holonome régulier et où b est un produit de formes linéaires affines à coefficients entiers positifs. Dans [S5], il utilise ces équations fonctionnelles dans le cas d'un morphisme sans éclatement en codimension zéro et à discriminant à croisement normal pour retrouver le résultat de F. Loeser. Dans sa thèse [R], O. Roualland poursuit dans cette direction et donne dans ce cadre une généralisation des résultats de D. Barlet et H.-M. Maire (voir [B-M]) sur le développement asymptotique d'intégrales fibres à une variable.

Soit $f = (f_1, \ldots, f_p) : X \to \mathbf{C}^p$, où X est une variété analytique complexe. Soit Y un sous-espace analytique de X, notons par F le produit $f_1 \cdots f_p$ et désignons par $W^\sharp_{f,Y}$ l'adhérence dans $T^*X \times \mathbf{C}^p$ de

$$\{x, \xi + \sum_{i=1}^{p} s_i \frac{df_i(x)}{f_i(x)}, s_1, \ldots, s_p) \; ; \; (x, \xi) \in T^*_Y X \text{ et } (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbf{C}^p\}.$$

Nous observons dans [B-M-M1] que les composantes irréductibles de $W^\sharp_{f,Y} \cap F^{-1}(0)$ sont contenues dans une réunion d'hyperplans vectoriels définis par des équations $a_1s_1 + \cdots + a_ps_p = 0$ à coefficients entiers positifs. Nous appellons ces hyperplans les pentes de $f_{|Y}$. Nous caractérisons dans [B-M-M2] les morphismes sans pente, c'est à dire ceux dont les pentes sont réduites aux hyperplans de coordonnées de $\mathbf{C}^p$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :
- $f_{|Y}$ est sans pente,
- $f_{|Y}$ est sans éclatement en codimension zéro et son lieu discriminant est contenu dans les hyperplans de coordonnées de $\mathbf{C}^p$.

Dans [B], J. Briançon avait étudié les germes de morphismes sans pente sur une variété analytique lisse. Il avait montré qu'ils sont caractérisés par une condition (T) dite de transversalité. Il obtenait que si $f : \mathbf{C}^n_{,0} \to \mathbf{C}^p_{,0}$ est sans pente et $f^{-1}(0)$ est lisse, il existe un changement de coordonnées à la source et des entiers $a_1, \ldots, a_p$ tels que $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^{a_1}, \ldots, x_p^{a_p})$.

Définition Si Λ est une variété lagrangienne conique de T^*X, nous disons que le couple (f, Λ) est sans pente si pour tout T^*_YX composante irréductible de Λ, le morphisme $(f_{i_1}, \ldots, f_{i_r})_{|Y}$ est sans pente où $\{i_1, \ldots, i_r\}$ est le sous-ensemble des indices i de $\{1, \ldots, p\}$ tels que $f_{i|Y} \neq 0$.

L'objet de cet article est de développer pour un morphisme une théorie des cycles évanescents d'un faisceau à cohomologie $\mathbf{C}$-constructible et d'un système différentiel holonome régulier de variété caractéristique Λ sous l'hypothèse que le couple (f, Λ) soit sans pente.

Etude Algébrique :

Soit X une variété analytique complexe et M un $\mathcal{D}_X$-Module holonome régulier de variété caractéristique $\operatorname{car} M$. Quitte à remplacer M par son image directe sur le graphe de f, nous pouvons supposer que les hypersurfaces $H_i = f_i^{-1}(0)$ sont lisses et que leur réunion forme un diviseur à croisements normaux. Nous montrons dans la section 3 que les assertions suivantes sont équivalentes :

- Le couple $(f, \operatorname{car} M)$ est sans pente,
- Le couple $(\mathbf{H} = (H_1, \ldots, H_p), M)$ est sans pente : toute section m de M satisfait pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ des équations fonctionnelles :

$$b_i(t_i \frac{\partial}{\partial t_i})m \in V_{0,\ldots,0}(\mathcal{D}_X)t_im,$$

  où $V_{0,\ldots,0}(\mathcal{D}_X)$ est le terme d'ordre $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ de la V-multifiltration de $\mathcal{D}_X$ indexée par $\mathbf{Z}^p$ relativement à $\mathbf{H}$ et $(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_p)$ un système de coordonnées locales de X dans lequel H_i a pour équation $t_i = 0$.

Supposons que $(\mathbf{H} = (H_1, \ldots, H_p), M)$ **soit sans pente**. Dans la section 2 sur les systèmes différentiels sans pente nous montrons que :

- M est muni d'une $V^{\mathbf{H}}$-multifiltration canonique notée $V_{\cdot}(M)$ du type Malgrange-Kashiwara.

Cette multifiltration permet de définir par exemple les cycles évanescents de M comme le gradué d'orde $\mathbf{0}$ de la mulfiltration canonique de M :

$$\Psi^{\mathbf{H}} M = \mathrm{gr}^V_{\mathbf{0}} M.$$

C'est un $\mathcal{D}_{\cap_1^p H_i}$-Module cohérent muni de l'action des opérateurs $E_i = t_i \frac{\partial}{\partial t_i}$ $(i \in \mathrm{I})$ qui commutent entre eux. Soit $\mathrm{I} \subset \{1, \dots, p\}$, notons I^c son complémentaire et $\mathbf{H}_{\mathrm{I}} = (H_i, i \in \mathrm{I})$. Nous avons de plus :

- Le couple $(\mathbf{H}_{\mathrm{I}}, M)$ est sans pente.
- Pour tout $\mathbf{k}_{\mathrm{I}} \in \mathbf{Z}^{\mathrm{I}}$, le couple $(\mathbf{H}_{\mathrm{I}^c}, \mathrm{gr}^V_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}}} M)$ est sans pente.
- Pour tout $(\mathbf{k}_{\mathrm{I}}, \mathbf{k}_{\mathrm{I}^c}) \in \mathbf{Z}^{\mathrm{I}} \times \mathbf{Z}^{\mathrm{I}^c}$:

$$\mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}^c}}}_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}^c}} \mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}}_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}}} M = \mathrm{gr}^V_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}}, \mathbf{k}_{\mathrm{I}^c}} M.$$

En particulier, nous obtenons :
- $\Psi^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}^c}}(\Psi^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}} M) = \Psi^{\mathbf{H}} M$.
- $\Psi^{\mathbf{H}} M = \Psi^{H_p} \cdots \Psi^{H_2} \Psi^{H_1} M$.
- Les foncteurs $\Psi^{H_p}, \dots, \Psi^{H_1}$ appliqués à M commutent.

A noter que la régularité du $\mathcal{D}_X$-Module M intervient dans le calcul de la variété caractéristique de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$. Ce calcul utilise en effet les résultats de [S2] (théorème 3.2) qui passent par une résolution des singulatités permettant de se ramèner à l'analyse d'un $\mathcal{D}_X$-Module holonome régulier à croisement normal.

Par symétrie avec l'étude topologique qui suit, signalons que suivant [Sc-Sc], si $(\mathbf{H}, M)$ est sans pente, les images directes locales de M par le morphisme $(t_1, \dots, t_p)$ sont à cohomologie cohérente et ont comme variétés caractéristiques une réunion d'espaces conormaux aux hyperplans de coordonnées.

Etude Topologique :

Soit $\mathcal{F}$ un complexe de faisceaux à cohomologie $\mathbf{C}$-constructible. Notons $\mathrm{car}\,\mathcal{F}$ sa variété caractéristique et **supposons que le couple** $(f, \mathrm{car}\,\mathcal{F})$ **soit sans pente**.

Un fait remarquable est que l'hypothèse sans pente assure à l'aide de résultats de M. Kashiwara et P. Schapira [K-S] :

- Les images directes locales de $\mathcal{F}$ par le morphisme f sont à cohomologie $\mathbf{C}$-constructible.
- Leurs variétés caractéristiques sont réunions de conormaux à des intersections d'hyperplans de coordonnées de $\mathbf{C}^p$.

On peut alors suivant P. Deligne [D] considérer les diagrammes cartésiens :

$$\begin{array}{ccccccc}
f^{-1}(0) & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & X^* = X - F^{-1}(0) & \xleftarrow{p} & \tilde{X} \\
\downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f^* & & \downarrow \tilde{f} \\
\{0\} & \xrightarrow{i} & \mathbf{C}^p & \xleftarrow{j} & (\mathbf{C}^*)^p & \xleftarrow{p} & \mathbf{C}^p,
\end{array}$$

où $\mathbf{C}^p$ est le revêtement universel de $(\mathbf{C}^*)^p$, p le morphisme :

$$\mathbf{C}^p \longrightarrow (\mathbf{C}^*)^p \ : \ p(z_1, \dots, z_p) = (e^{2i\pi z_1}, \dots, e^{2i\pi z_p}),$$

et i , j les morphismes d'inclusion. Nous posons alors :

$$\Psi_f\mathcal{F} = i^{-1}Rj_*p_*p^{-1}j^{-1}\mathcal{F},$$

qui est muni d'opérateurs de monodromies $M_1,\ldots,M_p$ qui commutent entre eux.

C. Sabbah avait défini pour $\mathcal{F}$ et f quelconque dans [S3] un analogue de ce complexe sous le nom de complexe d'Alexander de $\mathcal{F}$.

Sous nos hypothèses, il résulte des propriétes des images directes locales de $\mathcal{F}$ par le morphisme f :

- $\Psi_f(\mathcal{F})_0 = R\Gamma(B_\epsilon \cap f^{-1}(t),\mathcal{F})$ où B_ϵ est une boule assez petite de X centrée à l'origine et $t \in (\mathbf{C}^*)^p$ assez proche de l'origine.

Si $\mathrm{I} = \{i_1,\ldots,i_r\}$ et $\mathrm{I}^c = \{i_{r+1},\ldots,i_p\}$, notons $f_\mathrm{I} = (f_{i_1},\ldots,f_{i_r})$, nous montrons alors :

- $\Psi_f\mathcal{F}$ est à cohomologie $\mathbf{C}$-constructible.
- La variété caractéristique de $\Psi_f(\mathcal{F})$ n'est autre que la réunion des $W_{f,Y}\cap f^{-1}(0)$ où T^*_YX décrit les composantes irréductibles de $\operatorname{car}\mathcal{F}$ non contenues dans $F^{-1}(0)$ et $W_{f,Y}$ désigne l'espace conormal relatif au morphisme $f_{|Y}$ qui est l'adhérence des conormaux aux fibres lisses de $f_{|Y}$.
- Le couple $(\Psi_{f_\mathrm{I}}\mathcal{F}, \operatorname{car}(\Psi_{f_\mathrm{I}}\mathcal{F}))$ est sans pente.
- Les morphismes naturels $\Psi_{f_\mathrm{I}}(\Psi_{f_{\mathrm{I}^c}}\mathcal{F}) \to \Psi_f\mathcal{F} \leftarrow \Psi_{f_{\mathrm{I}^c}}(\Psi_{f_\mathrm{I}}\mathcal{F})$ sont des isomorphismes compatibles aux monodromies.
- $\Psi_f\mathcal{F} = \Psi_{f_p}\cdots\Psi_{f_2}\Psi_{f_1}\mathcal{F}$.
- Les foncteurs $\Psi_{f_p},\ldots,\Psi_{f_1}$ appliqués à $\mathcal{F}$ commutent.

Synthèse :

Soit M un $\mathcal{D}_X$-Module holonome régulier et $\mathcal{F}$ un complexe à cohomologie $\mathbf{C}$-constructible de variété caractéristique Λ. Posons :

$$\operatorname{Sol}_X M = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M,\mathcal{O}_X).$$

Pour $p=1$, suite aux travaux de B. Malgrange [M] et M. Kashiwara [K2], de nombreux résultats ont été établis sur $\Psi^H M$. En particulier, $\Psi^H M$ est un $\mathcal{D}_X$-Module holonome régulier supporté par $f^{-1}(0)$, $\Psi^H M$ et $\Psi_f(\operatorname{Sol}_X M)$ se correspondent par la correspondance de Riemann-Hilbert de M. Kashiwara [K3] et Z. Mebkhout [Meb] : $\operatorname{Sol}_H(\Psi^H M) = \Psi_f(\operatorname{Sol}_X M)$ et la monodromie sur $\Psi_f(\operatorname{Sol}_X M)$ se calculent à l'aide de l'action de l'opérateur d'Euler sur M (voir par exemple les notes du cours au CIMPA [M-M]).

Soit $p>1$. **Suposons le couple** (f,Λ) **soit sans pente**. Les formules itératives :

$$\Psi^{\mathbf{H}}M = \Psi^{H_p}\cdots\Psi^{H_2}\Psi^{H_1}M \text{ et } \Psi_f\mathcal{F} = \Psi_{f_p}\cdots\Psi_{f_2}\Psi_{f_1}\mathcal{F}$$

permettent par exemple d'obtenir :

- Le $\mathcal{D}_{\cap_k^p H_k}$-Module est régulier.
- Si $\mathcal{F}$ est pervers, alors $\Psi_f\mathcal{F}$ est pervers.

– $\mathrm{Sol}_{\cap_k^p H_k}(\Psi^{\mathbf{H}} M) = \Psi_f(\mathrm{Sol}_X M)$ et pour tout $1 \leq k \leq p$, la monodromie M_k sur $\Psi_f(\mathrm{Sol}_X M)$ correspond à l'action de $e^{-2i\pi E_k}$.

Morphismes sans éclatement en codimension zéro et morphismes sans pente

Terminons cette introduction par quelques remarques sur les morphismes sans éclatement en codimension zéro et les morphismes sans pente qui témoignent de leurs importances.

Nous avons rappelé qu'une suite d'éclatements au but transforme tout morphisme en un morphisme sans éclatement en codimension zéro. Rappelons quelques unes des propriétés des morphismes sans éclatement en codimension zéro. (voir [H-M-S]) :

– Les morphismes sans éclatement en codimension zéro sont stables par changement de base au but.
– Si nous complétons un tel morphisme par une forme linéaire générique, il reste sans éclatement en codimension zéro.
– Les morphismes finis sont sans éclatement en codimension zéro.

Les morphismes sans pente apparaissent alors naturellement par un changement de base résolvant le discriminant d'un morphisme sans éclatement en codimension zéro.

Les singularités S quasi-ordinaires de dimension d sont les singularités qui admettent une projection finie sur $\mathbf{C}^d$ non ramifiée en dehors d'un diviseur à croisement normal. Elles donnent des familles d'exemples de morphismes sans pente. Ainsi si S est une hypersurface à singularité quasi-ordinaire de $\mathbf{C}^n$ définie par une fonction analytique f et π la projection quasi-ordinaire associée, le couple $(\pi, \mathrm{car}\, \Psi_f \mathbf{C})$ est sans pente. Dans [G-G], P. Gonzalez Perez et M. Gonzalez Villa étudie la fibre de Milnor d'une telle fonction f. Notre travail donne dans ce cas des informations sur $\Psi_f \mathbf{C}$ ou sur le module holonome régulier qui lui correspond. Les morphismes quasi-ordinaires sont obtenus par changements de base au but de morphismes finis. Ils sont à la source de la méthode de Jung de résolution des singularités (voir [Li]).

Remerciements

J'exprime tous mes remerciements à M. Merle et C. Sabbah. Ils sont autant par leurs travaux que par de nombreuses discussions à l'origine et à la conclusion de ce travail.

2. Cycles évanescents des systèmes différentiels sans pente

Soit X une variété analytique complexe de dimension $n+p$. Nous désignons par $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X et par $\mathcal{D}_X$ celui des opérateurs différentiels holomorphes.

Dans la suite, nous fixons p hypersurfaces lisses $H_1, \ldots, H_p$ de X d'idéaux $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_p$ dont la réunion forme un diviseur à croisements normaux. Notons $\mathbf{H}$ l'ensemble $\{H_1, \ldots, H_p\}$ et pour $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbf{Z}^p$, nous poserons $\mathcal{J}^{\mathbf{k}} := \prod_{i=1}^p \mathcal{J}_i^{k_i}$, avec la convention que $\mathcal{J}_i^{k_i} = \mathcal{O}_X$ pour $k_i \leq 0$. Ci-dessous, $\mathbf{Z}^p$ sera muni de son ordre partiel naturel , et on notera $\mathbf{k} < \mathbf{l} \Leftrightarrow \mathbf{k} \leq \mathbf{l}$ et $\mathbf{k} \neq \mathbf{l}$ et $\mathbf{1}_i = (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ où le 1 est plaçé à la i-ème place.

Définition 1. *Pour $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^p$, et $x \in X$, nous posons :*

$$(V_{\mathbf{k}}^{\mathbf{H}}\mathcal{D}_X)_x := \{P \in \mathcal{D}_{X,x} \mid \forall \mathbf{m} \in \mathbf{Z}^p \ , \ P(\mathcal{J}_x^{\mathbf{k}+\mathbf{m}}) \subset \mathcal{J}_x^{\mathbf{m}}\},$$

que nous noterons $(V_{\mathbf{k}}\mathcal{D}_X)_x$ si aucune confusion n'est à craindre.

De manière tout à fait analogue au cas où $p = 1$ ([K2], voir aussi [M-M], [S1]), nous définissons alors une filtration croissante $V_{\mathbf{k}}\mathcal{D}_X$ de $\mathcal{D}_X$ indexée par $\mathbf{Z}^p$, qui satisfait à

$$V_{\mathbf{k}}(\mathcal{D}_X)V_{\mathbf{m}}(\mathcal{D}_X) \subset V_{\mathbf{k}+\mathbf{m}}(\mathcal{D}_X),$$

avec égalité si les composantes de $\mathbf{k}$ et $\mathbf{m}$ ont même signe.

Soit $\mathrm{I} \subset \{1, \ldots, p\}$ et I^c son complémentaire. En notant $\mathbf{H}_{\mathrm{I}} = \{H_i\}_{i\in\mathrm{I}}$, nous avons pour tout $\mathbf{k}_{\mathrm{I}} \in \mathbf{Z}^{\mathrm{I}}$:

$$V_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}}}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}\mathcal{D}_X = \sum_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}^c}\in\mathbf{Z}^{\mathrm{I}^c}} V_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}},\mathbf{k}_{\mathrm{I}^c}}\mathcal{D}_X = \bigcup_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}^c}\in\mathbf{Z}^{\mathrm{I}^c}} V_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}},\mathbf{k}_{\mathrm{I}^c}}\mathcal{D}_X.$$

Pour $\mathrm{I} = \{i\}$ et $k \in \mathbf{Z}$, $V_k^{\mathbf{H}_{\{i\}}}\mathcal{D}_X$ noté $V_k^{H_i}\mathcal{D}_X$, n'est autre que le terme d'ordre k de la V-filtration de $\mathcal{D}_X$ le long de l'hypersurface H_i et nous avons :

$$V_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}}}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}\mathcal{D}_X = \bigcap_{i\in\mathrm{I}} V_{k_i}^{H_i}\mathcal{D}_X.$$

Soit $\mathrm{I} \subset \{1, \ldots, p\}$, sur chaque anneau gradué :

$$\mathrm{gr}_{\mathbf{0}_{\mathrm{I}}}^{V^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}}(V_{\mathbf{0}}\mathcal{D}_X) = \frac{V_{\mathbf{0}}\mathcal{D}_X}{\sum_{i\in\mathrm{I}} V_{\mathbf{0}-\mathbf{1}_i}\mathcal{D}_X}$$

sont définis les champs d'Euler E_i ($i \in I$) induits par l'action de $t_i\frac{\partial}{\partial t_i}$ dans un système de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_p)$ tel que $\mathcal{J}_i = (t_i)$. Ces opérateurs commutent deux à deux.

La notion de bonne V-multifiltration pour un $\mathcal{D}_X$-Module cohérent M a été introduite dans [S1]. Une telle multifiltration croissante $U_{\cdot}M$ est indexée par $\mathbf{Z}^p$. Pour $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^p$, nous utilisons la notation $U_{<\mathbf{k}}M$ pour $\sum_{\mathbf{k}'<\mathbf{k}} U_{\mathbf{k}'}M$. Si nous nous donnons une partition $\{1, \ldots, p\} = \mathrm{I} \cup \mathrm{I}^c$, nous posons :

$$U_{<\mathbf{k}_{\mathrm{I}},\mathbf{k}_{\mathrm{I}^c}}M = \sum_{\mathbf{k}'_{\mathrm{I}}<\mathbf{k}_{\mathrm{I}}} U_{\mathbf{k}'_{\mathrm{I}},\mathbf{k}_{\mathrm{I}^c}}M.$$

Nous avons des propriétés complétement analogues à celles des bonnes V-filtrations lorsque $p = 1$ ([K2], voir aussi [M-M], [S1]). Par exemple, nous avons :

– Une V-multifiltration $U_{\cdot}M$ de M (i.e. qui satisfait à $V_{\mathbf{k}}\mathcal{D}_X.U_{\mathbf{k}'}M \subset U_{\mathbf{k}+\mathbf{k}'}M$) est bonne si et seulement si, localement, elle est engendrée par un nombre fini de sections locales $(m_j)_{j\in J}$: pour tout $j \in J$, il existe $\mathbf{k_j} \in \mathbf{Z}^p$ tel que $U_{\mathbf{k}}M = \sum_{j\in J} V_{\mathbf{k}+\mathbf{k_j}}\mathcal{D}_X.m_j$ et cela pour tout $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^p$.
– Deux bonnes V-multifiltrations $U_{\cdot}M$ et $U'_{\cdot}M$ sont comparables localement, c'est à dire que localement il existe $\mathbf{k_0} \in \mathbf{N}^p$ tel que pour tout $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^p$ on ait :

$$U'_{\mathbf{k}-\mathbf{k_0}}M \subset U_{\mathbf{k}}M \subset U'_{\mathbf{k}+\mathbf{k_0}}M \subset U_{\mathbf{k}+2\mathbf{k_0}}M.$$

– Dans une suite exacte courte de $\mathcal{D}_X$-Modules cohérents, une bonne V-multifiltration du terme central induit une bonne V-multifiltration des termes extrêmes.

Considérons une bonne V-multifiltration $U_{\cdot}M$ d'un $\mathcal{D}_X$-Module cohérent M. Elle engendre une bonne $V^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}$-multifiltration $U_{\cdot}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}M$ de M défini pour tout $\mathbf{k}_{\mathrm{I}} \in \mathbf{Z}^{\mathrm{I}}$ par

$$U^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}}}M = \sum_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}^c} \in \mathbf{Z}^{\mathrm{I}^c}} U_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}},\mathbf{k}_{\mathrm{I}^c}}M = \bigcup_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}^c} \in \mathbf{Z}^{\mathrm{I}^c}} U_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}},\mathbf{k}_{\mathrm{I}^c}}M.$$

Chaque $U^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}}}M$ est un $V^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}_{\mathbf{0}_{\mathrm{I}}}\mathcal{D}_X$-Module cohérent. Pour tout $J \subset \{1,\ldots,p\}$ disjoint de I, l'anneau $V^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}_{\mathbf{0}_{\mathrm{I}}}\mathcal{D}_X$ est muni d'une $V^{\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}$-multifiltration indexée par $\mathbf{Z}^{\mathrm{J}}$ dont le terme d'ordre $\mathbf{k}_{\mathrm{J}}$ est $V^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}\cup\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}_{\mathbf{0}_{\mathrm{I}},\mathbf{k}_{\mathrm{J}}}\mathcal{D}_X$. La notion de bonne $V^{\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}$-multifiltration d'un $V^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}_{\mathbf{0}_{\mathrm{I}}}\mathcal{D}_X$-Module cohérent se définit de manière analogue à ce qui a été vu ci-dessus, et satisfait à des propriétés similaires. Le Module $U^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}}}M$ est alors muni de la bonne $V^{\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}$-multifiltration dont le terme d'ordre $\mathbf{k}_{\mathrm{J}} \in \mathbf{Z}^{\mathrm{J}}$ est

$$U^{\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}_{\mathbf{k}_{\mathrm{J}}}(U^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}}}M) = U^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}\cup\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}},\mathbf{k}_{\mathrm{J}}}M.$$

De même, chaque I-multigradué $\mathrm{gr}^{U_{\cdot}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}}_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}}}M = U^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}}}M/U^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}_{<\mathbf{k}_{\mathrm{I}}}M$ est $\mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}}_{\mathbf{0}_{\mathrm{I}}}\mathcal{D}_X$-cohérent et muni d'une bonne $V^{H_{\mathrm{J}}}$-multifiltration préservée par les champs d'Euler E_i $(i \in \mathrm{I})$:

$$U^{\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}_{\mathbf{k}_{\mathrm{J}}}(\mathrm{gr}^{U_{\cdot}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}}_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}}}M) = \frac{U^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}\cup\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}},\mathbf{k}_{\mathrm{J}}}M + U^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}_{<\mathbf{k}_{\mathrm{I}}}M}{U^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}_{<\mathbf{k}_{\mathrm{I}}}M} = \frac{U^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}\cup\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}},\mathbf{k}_{\mathrm{J}}}M}{U^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}\cup\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}},\mathbf{k}_{\mathrm{J}}}M \cap U^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}_{<\mathbf{k}_{\mathrm{I}}}M}.$$

Le gradué d'ordre $\mathbf{k}_{\mathrm{J}}$ est :

$$\begin{aligned}\mathrm{gr}^{U_{\cdot}^{H_{\mathrm{J}}}}_{\mathbf{k}_{\mathrm{J}}}(\mathrm{gr}^{U_{\cdot}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}}_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}}}M) &= \frac{U^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}\cup\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}},\mathbf{k}_{\mathrm{J}}}M/U^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}\cup\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}},\mathbf{k}_{\mathrm{J}}} \cap U^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}_{<\mathbf{k}_{\mathrm{I}}}M}{U^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}\cup\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}},<\mathbf{k}_{\mathrm{J}}}M/U^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}\cup\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}},<\mathbf{k}_{\mathrm{J}}}M \cap U^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}_{<\mathbf{k}_{\mathrm{I}}}M}\\ &= \frac{U^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}\cup\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}},\mathbf{k}_{\mathrm{J}}}M}{U^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}\cup\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}},<\mathbf{k}_{\mathrm{J}}}M + U^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}\cup\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}},\mathbf{k}_{\mathrm{J}}}M \cap U^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}_{<\mathbf{k}_{\mathrm{I}}}M}.\end{aligned}$$

Définition 2. *Soit M un $\mathcal{D}_X$-Module cohérent.*

(1) *On dit que le couple $(\mathbf{H}, M)$ est multispécialisable sans pente si au voisinage de tout point de X, il existe une bonne V-multifiltration $U_{\cdot}(M)$ de M et des polynômes $b_i(s) \in \mathbf{C}[s]$ $(i \in \{1,\ldots,p\})$ tels que pour tout $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^p$, $b_i(E_i + k_i)U_{\mathbf{k}}M \subset U_{\mathbf{k}-\mathbf{1}_i}M$.*

(2) *On dit que le couple $(\mathbf{H}, M)$ est multispécialisable sans pente par section si, pour toute section locale m de M, il existe des polynômes $b_i(s) \in \mathbf{C}[s]$ $(i \in \{1,\ldots,p\})$ tels que $b_i(E_i)m \in V_{\mathbf{0}-\mathbf{1}_i}\mathcal{D}_X.m$.*

Proposition 1. *Les deux définitions 2.1 et 2.2 sont équivalentes et si la condition 2.1 est satisfaite pour une bonne V-multifiltration de M, elle l'est pour toute.*

On dira simplement que $(\mathbf{H}, M)$ est sans pente lorsque ces propriétés sont satisfaites. Pour toute section m de M, on notera $b_{i,m}$ le polynôme unitaire de plus bas degré tel que $b_i(E_i)m \in V_{\mathbf{0}-\mathbf{1}_i}\mathcal{D}_X.m$ et $b_{i,U_{\cdot}(M)}$ le polynôme unitaire de plus bas degré tel que, pour tout $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^p$, $b_{i,U_{\cdot}(M)}(E_i + k_i)U_{\mathbf{k}}M \subset U_{\mathbf{k}-\mathbf{1}_i}M$.

Preuve : Supposons $(\mathbf{H}, M)$ multispécialisable sans pente par section. Soit une V-multifiltration $U_{\cdot}(M)$ de M. Localement, cette multifiltration est engendrée par un nombre fini de sections locales $(m_j)_{j\in J}$ de poids $\mathbf{k_j} \in \mathbf{Z}^p$. On en déduit alors pour tout $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^p$ et $i \in \{1,\ldots,p\}$:

$$\prod_{j\in J} b_{i,m_j}(E_i + k_{j,i} + k_i)U_{\mathbf{k}}M \subset U_{\mathbf{k}-\mathbf{1}_i}M,$$

où $\mathbf{k_j} = (k_{j,1},\ldots,k_{j,p})$. Ainsi, toute bonne V-multifiltration de M satisfait la définition 2.1.

Soit une V-multifiltration $U_{\cdot}(M)$ de M vérifiant 2.1. Soit $\mathrm{I} \subset \{1, \dots, p\}$ de cardinal $p-1$ et $\{i\} = \mathrm{I}^c$. Pour tout $m \in M$, il existe $l_i \in \mathbf{Z}$ et $\mathbf{l}_\mathrm{I} \in \mathbf{Z}^\mathrm{I}$ tel que $m \in U_{l_i, \mathbf{l}_\mathrm{I}} = U^{H_i}_{\mathbf{l}_i}(U^{\mathbf{H}_\mathrm{I}}_{l_\mathrm{I}} M)$.

Considérons le $V^{\mathbf{H}_\mathrm{I}}_{\mathbf{0}_\mathrm{I}} \mathcal{D}_X$-sous-module cohérent $V^{\mathbf{H}_\mathrm{I}}_{\mathbf{0}_\mathrm{I}} \mathcal{D}_X \cdot m$ de $U^{\mathbf{H}_\mathrm{I}}_{\mathbf{l}_\mathrm{I}} M$. Il est muni de deux $V^{H_i} V^{\mathbf{H}_\mathrm{I}}_{\mathbf{0}_\mathrm{I}} \mathcal{D}_X$-multifiltrations.

– La première, $(V^{H_i}_{\cdot} V^{\mathbf{H}_\mathrm{I}}_{\mathbf{0}_\mathrm{I}} \mathcal{D}_X) \cdot m$, est celle engendrée par m. Elle est bonne par définition.
– La seconde est la filtration du $V^{\mathbf{H}_\mathrm{I}}_{\mathbf{0}_\mathrm{I}} \mathcal{D}_X$-sous-module $V^{\mathbf{H}_\mathrm{I}}_{\mathbf{0}_\mathrm{I}} \mathcal{D}_X \cdot m$ induite par la bonne $V^{H_i} V^{\mathbf{H}_\mathrm{I}}_{\mathbf{0}_\mathrm{I}} \mathcal{D}_X$ multifiltration $U^{H_i}_{\cdot}(U^{\mathbf{H}_\mathrm{I}}_{\mathbf{l}_\mathrm{I}} M)$. Elle est aussi bonne d'après les propriétés vues plus haut.

Elles sont donc comparables et il existe donc un entier $r \geq 0$ tel que :

$$U^{H_i}_{l_i - r}(U^{\mathbf{H}_\mathrm{I}}_{\mathbf{l}_\mathrm{I}} M) \cap V^{\mathbf{H}_\mathrm{I}}_{\mathbf{0}_\mathrm{I}} \mathcal{D}_X m \subset V^{H_i}_{-1}(V^{\mathbf{H}_\mathrm{I}}_{\mathbf{0}_\mathrm{I}} \mathcal{D}_X m).$$

Il en résulte :

$$b_{i,U_{\cdot}(M)}(E_i + l_i - r + 1) \cdots b_{i,U_{\cdot}(M)}(E_i + l_i) m \in V_{\mathbf{0} - \mathbf{1}_i} \mathcal{D}_X m.$$

Cela montre que $(\mathbf{H}, M)$ est multispécialisable sans pente par section.

Théorème 1. *Si le couple $(\mathbf{H}, M)$ est sans pente, il existe une unique V-multifiltration globale note $V_{\cdot}(M)$ telle que les parties réelles des racines des polynômes $b_{i,V_{\cdot}(M)}$ soient dans l'intervalle $[-1, 0[$. De plus, nous avons pour tout $x \in X$ et $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^p$:*

$$(V_\mathbf{k} M)_x = \{m \in M_x \; ; \; \mathrm{Re}\, \alpha \geq -k_i - 1 \; , \; \forall\, \alpha \in b^{-1}_{i,m}(0) \text{ et } 1 \leq i \leq p\},$$

où $\mathrm{Re}\,\alpha$ désigne la partie réelle du nombre α.

On appelle cette bonne V-multifiltration, la V-multifiltration de Malgrange-Kashiwara (ou multifiltration canonique de M).

Preuve : Supposons $(\mathbf{H}, M)$ sans pente. On montre comme pour $p = 1$, en utilisant des opérations élémentaires de décalage d'entiers, l'existence d'une bonne V-multifiltration de M comme annoncée dans le théorème. Son unicité se prouve en utilisant un argument de E. Bézout. Soit $m \in (V_\mathbf{k} M)_x$. Suivant la preuve de la proposition 1, le polynôme $b_{i,m}$ divise $b_{i,V_{\cdot}(M)}(s + k_i - r + 1) \cdots b_{i,V_{\cdot}(M)}(s + k_i)$ pour r entier assez grand. Donc les parties réelles des racines des $b_{i,m}$ sont supérieures ou égales à $-k_i - 1$. Inversement, soit $m \in M_x$ tel que les parties réelles des racines des $b_{i,m}$ sont supérieures ou égales à $-k_i - 1$. Il existe $\mathbf{r} \in \mathbf{N}^p$ tel que $m \in V_{\mathbf{k}+\mathbf{r}} M$. On a :

$$b_{i,m}(E_i) m \in V_{\mathbf{0} - \mathbf{1}_i} \mathcal{D}_X . m \in V_{\mathbf{k} + \mathbf{r} - \mathbf{1}_i} M,$$
$$b_{i,V_{\cdot}(M)}(E_i + k_i + r_i) m \in V_{\mathbf{k} + \mathbf{r} - \mathbf{1}_i} M.$$

Si $r_i > 0$, les polynômes $b_{i,V_{\cdot}(M)}(s + k_i + r + 1)$ et $b_{i,m}(s)$ sont premiers entre eux. En utilisant une identité de E. Bézout, on obtient $m \in V_{\mathbf{k} + \mathbf{r} - \mathbf{1}_i} M$. Il reste à itérer pour obtenir $m \in (V_\mathbf{k} M)_x$.

Corollaire 1. *Supposons $(\mathbf{H}, M)$ sans pente.*
– *Alors pour tout $\mathrm{I} \subset \{1, \dots, p\}$, le couple $(\mathbf{H}_\mathrm{I}, M)$ est sans pente.*
– *La $V^{\mathbf{H}_\mathrm{I}} \mathcal{D}_X$-multifiltration canonique de M est la multifiltration $V^{\mathbf{H}_\mathrm{I}}_{\cdot} M$ associée à la multifiltration canonique de M : $V^{\mathbf{H}_\mathrm{I}}_{\mathbf{k}_\mathrm{I}} M = \sum_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}^c} \in \mathbf{Z}^{\mathrm{I}^c}} V_{\mathbf{k}_\mathrm{I}, \mathbf{k}_{\mathrm{I}^c}} M$.*

Nous avons de plus :

(1) *Pour tout $x \in X$:*

$$(V^{\mathbf{H}_\mathrm{I}}_{\mathbf{k}_\mathrm{I}} M)_x = \{m \in M_x \; ; \; \forall \alpha \in b^{-1}_{i,m}(0) \text{ et } \forall\, i \in \mathrm{I} \; : \; \mathrm{Re}\, \alpha \geq -k_i - 1\}.$$

(2) *Pour tout $I, J \subset \{1, \dots, p\}$ d'intersection vide et $(\mathbf{k}_\mathrm{I}, \mathbf{k}_\mathrm{J}) \in \mathbf{Z}^\mathrm{I} \times \mathbf{Z}^\mathrm{J}$:*

$$V^{\mathbf{H}_\mathrm{I} \cup \mathbf{H}_\mathrm{J}}_{\mathbf{k}_\mathrm{I}, \mathbf{k}_\mathrm{J}} M = V^{\mathbf{H}_\mathrm{I}}_{\mathbf{k}_\mathrm{I}} M \cap V^{\mathbf{H}_\mathrm{J}}_{\mathbf{k}_\mathrm{J}} M.$$

(3) *Pour tout* $\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^p$, $V_{\mathbf{k}}M=\cap_{i=1}^{p}V_{k_i}^{H_i}M$.

Nous voyons ainsi que si $(\mathbf{H},M)$ est sans pente, la bonne V-multifiltration canonique $V_{\cdot}M$ est sans pente au sens de [S1] p.309.

Preuve : Il résulte de la définition de $V_{\cdot}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}$ que pour tout $i\in\mathrm{I}$ et $\mathbf{k}_{\mathrm{I}}\in\mathbf{Z}^{\mathrm{I}}$:

$$b_{i,V_{\cdot}(M)}(t_i\frac{\partial}{\partial t_i})V_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}}}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}M\subset V_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}}-\mathbf{1}_i}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}M.$$

Ainsi, $(\mathbf{H}_{\mathrm{I}},M)$ est sans pente de filtration canonique $V_{\cdot}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}M$. Une section m appartient à $V_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}}}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}M$ si et seulement s'il existe $\mathbf{l}_{\mathrm{I}^c}\in\mathbf{Z}^{\mathrm{I}^c}$ tel que $m\in V_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}},\mathbf{l}_{\mathrm{I}^c}}M$. Donc, si et seulement si les parties réelles des racine des $b_{i,m}$ pour $i\in\mathrm{I}$ sont supérieures ou égales à $-k_i-1$. Cela montre l'assertion 1. Les deux autres assertions s'en déduisent.

Proposition 2. *Supposons* $(\mathbf{H},M)$ *sans pente. Pour tout* $I,J\subset\{1,\ldots,p\}$ *d'intersection vide, nous avons les isomorphismes naturels de* $\mathrm{gr}_{\mathbf{0}_{\mathrm{I}\cup\mathrm{J}}}^{V^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}\cup\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}}(V_{\mathbf{0}}\mathcal{D}_X)$*-Modules :*

$$\mathrm{gr}_{\mathbf{k}_{\mathrm{J}}}^{V_{\cdot}^{\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}}(\mathrm{gr}_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}}}^{V_{\cdot}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}}M)=\frac{V_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}},\mathbf{k}_{\mathrm{J}}}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}\cup\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}M}{V_{<(\mathbf{k}_{\mathrm{I}},\mathbf{k}_{\mathrm{J}})}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}\cup\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}M}=\mathrm{gr}_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}},\mathbf{k}_{\mathrm{J}}}^{V_{\cdot}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}\cup\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}}M.$$

Preuve : La proposition résulte directement du lemme suivant.

Lemme 1. *Sous les hypothèses de la proposition 2, nous avons :*

$$V_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}},<\mathbf{k}_{\mathrm{J}}}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}\cup\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}M+(V_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}},\mathbf{k}_{\mathrm{J}}}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}\cup\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}M\cap V_{<\mathbf{k}_{\mathrm{I}}}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}M)=V_{<(\mathbf{k}_{\mathrm{I}},\mathbf{k}_{\mathrm{J}})}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}\cup\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}M.$$

Preuve : Le point clef est de montrer l'inclusion :

$$V_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}},\mathbf{k}_{\mathrm{J}}}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}\cup\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}M\cap V_{<\mathbf{k}_{\mathrm{I}}}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}M\subset V_{<(\mathbf{k}_{\mathrm{I}},\mathbf{k}_{\mathrm{J}})}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}\cup\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}M.$$

Soit $m\in V_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}},\mathbf{k}_{\mathrm{J}}}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}\cup\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}M\cap V_{<\mathbf{k}_{\mathrm{I}}}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}M$. Soit $j\in J$. Pour $a\geq 0$ entier assez grand :

$$m\in V_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}},\mathbf{k}_{\mathrm{J}}}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}\cup\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}M\cap V_{<\mathbf{k}_{\mathrm{I}},k_j+a}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}\cup\{j\}}}M.$$

Nous avons :

$$b_{j,V_{\cdot}(M)}(E_j+k_j+1)\cdots b_{j,V_{\cdot}(M)}(E_j+k_j+a)m\in V_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}},\mathbf{k}_{\mathrm{J}}}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}\cup\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}M\cap V_{<\mathbf{k}_{\mathrm{I}},k_j}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}\cup\{j\}}}M.$$

$$b_{j,m}(E_j+k_j)m\in V_{(\mathbf{k}_{\mathrm{I}},\mathbf{k}_{\mathrm{J}})-\mathbf{1}_j}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}\cup\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}M.$$

Si $a>0$, les polynômes $b_{j,V_{\cdot}(M)}(s+k_j+1)\cdots b_{j,V_{\cdot}(M)}(s+k_j+a)$ et $b_{j,m}(s+k_j)$ sont premiers entre eux, nous déduisons d'une relation de E. Bézout :

$$m\in V_{<(\mathbf{k}_{\mathrm{I}},\mathbf{k}_{\mathrm{J}})}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}\cup\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}M+(V_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}},\mathbf{k}_{\mathrm{J}}}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}\cup\mathbf{H}_{\mathrm{J}}}M\cap V_{<(\mathbf{k}_{\mathrm{I}},k_j)}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}\cup\{j\}}}M).$$

Le point clef en résulte par récurrence sur le cardinal de J.

Il résulte de la proposition 2 que pour $\mathrm{I}=\{i_1,\ldots,i_r\}$ et tout $\mathbf{k}_{\mathrm{I}}\in\mathbf{Z}^{\mathrm{I}}$, le gradué $\mathrm{gr}_{\mathbf{k}_{\mathrm{I}}}^{V_{\cdot}^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}}M$ est obtenu comme le gradué pour les filtrations induites par les $V_{\cdot}^{H_{i_s}}M$ sur les gradués précédents $\mathrm{gr}_{k_{i_{s-1}}}^{V_{\cdot}^{\mathbf{H}_{i_{s-1}}}}\cdots\mathrm{gr}_{k_{i_1}}^{V_{\cdot}^{\mathbf{H}_{i_1}}}M$.

Définition 3. *Si* $(\mathbf{H},M)$ *est sans pente, on appelle cycles* $\mathbf{H}_{\mathrm{I}}$*-proches et* $\mathbf{H}_{\mathrm{I}^c}$*-évanescents de* M *le* $\mathrm{gr}_{\mathbf{0}}^{V}\mathcal{D}_X$*-Module :*

$$\Psi_{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}\Phi_{\mathbf{H}_{\mathrm{I}^c}}M=\Phi_{\mathbf{H}_{\mathrm{I}^c}}\Psi_{\mathbf{H}_{\mathrm{I}}}M:=\mathrm{gr}_{-\mathbf{1}_{\mathrm{I}},\mathbf{0}_{\mathrm{I}^c}}^{V}M.$$

On appelle cycles $\mathbf{H}$*-proches de* M *et cycles* $\mathbf{H}$*-évanescents de* M *respectivement :*

$$\Psi_{\mathbf{H}}M=\mathrm{gr}_{-\mathbf{1}}^{V}M\quad\text{et}\quad\Phi_{\mathbf{H}}M=\mathrm{gr}_{\mathbf{0}}^{V}M.$$

Rappelons que $b_{i,V_\cdot(M)}(E_i+k_i)$ annule $\mathrm{gr}_{\mathbf{k}}^V M$ et que les parties réelles des racines des polynômes $b_{i,V_\cdot(M)}(s+k_i)$ appartiennent à l'intervalle $[-k_i-1,-k_i[$. Soit, $\alpha\in\mathbf{C}^p$ et

$$\lceil\alpha\rceil=(\lceil\alpha_1\rceil,\ldots,\lceil\alpha_p\rceil),$$

où $\lceil\alpha_i\rceil$ est le plus grand entier inférieur ou égal à Re α_i. On note alors :

$$\Psi_{\mathbf{H},\alpha}M=\cap_{i=1}^p(\cup_{N\in\mathbf{N}}\mathrm{Ker}\,[(E_i+\alpha_i)^N:\mathrm{gr}^V_{\lceil\alpha\rceil}M\to\mathrm{gr}^V_{\lceil\alpha\rceil}M]).$$

Les intersections et réunions commutent, car les réunions sont localement finis comme les multiplicités de la racine $-\alpha_i$ de $b_{i,V_\cdot(M)}(s)$. Comme les opérateurs E_i commutent, nous avons pour tout $\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^p$:

$$\mathrm{gr}^V_{\mathbf{k}}M=\bigoplus_{\alpha;\lceil\alpha\rceil=\mathbf{k}}\Psi_{\mathbf{H},\alpha}M.$$

En particulier :

$$\Psi_{\mathbf{H}_\mathrm{I}}\Phi_{\mathbf{H}_{\mathrm{I}^c}}M=\bigoplus_{\lceil\alpha_\mathrm{I}\rceil=-\mathbf{1}_\mathrm{I};\lceil\alpha_{\mathrm{I}^c}\rceil=\mathbf{0}_{\mathrm{I}^c}}\Psi_{\mathbf{H},\alpha}M.$$

Nous notons que les α pour lesquels $\Psi_{\mathbf{H},\alpha}M\neq0$ sont dans un réseau défini à l'aide des racines des polynômes $b_{i,V_\cdot(M)}$.

Supposons $H_1,\ldots,H_p$ munis d'équations globales. Le gradué $\mathrm{gr}_{\mathbf{0}_\mathrm{I}}^{V^{\mathbf{H}_\mathrm{I}}}\mathcal{D}_X$ s'identifie à

$$\mathcal{D}_{\cap_{i\in\mathrm{I}}H_i}[E_1,\ldots,E_p].$$

Pour $j\in\mathrm{I}^c$, nous continuons à noter H_j l'hypersurface $H_j\cap_{i\in\mathrm{I}}H_i$ de $\cap_{i\in\mathrm{I}}H_i$.

Proposition 3. *Supposons $H_1,\ldots,H_p$ munis d'équations globales et le couple $(\mathbf{H},M)$ sans pente. Soit $I=\{i_1,\ldots,i_r\}$, $I^c=\{i_{r+1},\ldots,i_p\}$ et $\mathbf{k}_\mathrm{I}\in\mathbf{Z}^\mathrm{I}$.*

- *Le $\mathcal{D}_{\cap_{i\in\mathrm{I}}H_i}[(E_i)_{i\in\mathrm{I}}]$-Module $\mathrm{gr}_{\mathbf{k}_\mathrm{I}}^{V_\cdot^{\mathbf{H}_\mathrm{I}}}M$ est un $\mathcal{D}_{\cap_{i\in\mathrm{I}}H_i}$-Module cohérent.*
- *Le couple $(\mathbf{H}_{\mathrm{I}^c},\mathrm{gr}_{\mathbf{k}_\mathrm{I}}^{V_\cdot^{\mathbf{H}_\mathrm{I}}}M)$ est sans pente.*
- *Sa filtration canonique est la filtration $V_\cdot^{\mathbf{H}_{\mathrm{I}^c}}(\mathrm{gr}_{\mathbf{k}_\mathrm{I}}^{V_\cdot^{\mathbf{H}_\mathrm{I}}}M)$ induite par la filtration canonique de M.*
- *Nous avons l'égalité de $\mathcal{D}_{\cap_{i=1}^pH_i}[(E_i)_{i\in\mathrm{I}}]$-Module :*

$$\Psi_{\mathbf{H}_\mathrm{I}}\Phi_{\mathbf{H}_{\mathrm{I}^c}}M=\Psi_{H_{i_r}}\cdots\Psi_{H_{i_1}}\Phi_{H_{i_p}}\cdots\Phi_{H_{i_{r+1}}}M.$$

- *Les foncteurs $\Phi_{H_{i_{r+1}}},\cdots,\Phi_{H_{i_p}},\Psi_{H_{i_1}},\cdots,\Psi_{H_{i_r}}$ commutent quand ils sont appliqués à M.*
- *Pour tout $\alpha\in\mathbf{C}^p$, $\Psi_{\mathbf{H},\alpha}M=\Psi_{H_1,\alpha_1}\ldots\Psi_{H_p,\alpha_pM}$.*

Preuve : C'est une reformulation de la proposition 2. La cohérence de $\mathrm{gr}_{\mathbf{k}_\mathrm{I}}^{V_\cdot^{\mathbf{H}_\mathrm{I}}}M$ comme $\mathcal{D}_{\cap_{i\in\mathrm{I}}H_i}$-Module provient du fait que ce module est annulé par les opérateurs $b_{i,V_\cdot(M)}(E_i+k_i)$ pour $i\in\mathrm{I}$. L'assertion sur les $\Psi_{\mathbf{H},\alpha}M$ provient du fait que les opérateurs d'Euler commutent et sont d'ordre $\mathbf{0}$.

Nous notons que $\Psi_{\mathbf{H}_\mathrm{I}}\Phi_{\mathbf{H}_{\mathrm{I}^c}}M=\Psi_{\mathbf{H}_\mathrm{I}}(\Phi_{\mathbf{H}_{\mathrm{I}^c}}M)=\Phi_{\mathbf{H}_{\mathrm{I}^c}}(\Psi_{\mathbf{H}_\mathrm{I}}M)$.

3. Morphisme sans pente et systèmes différentiels holonomes réguliers

3.1. **Morphisme sans pente.** Soit X un germe de variété analytique de dimension n et Y un sous-espace irréductible de X. Soit $f_1,\ldots,f_p$, p fonctions analytiques sur X nulles à l'origine. Notons par F leur produit $f_1f_2\cdots f_p$, désignons par f l'application :

$$f:X\longrightarrow\mathbf{C}^p\quad,\quad(x_1,\ldots,x_n)\longmapsto(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_p(x_1,\ldots,x_n))$$

et par $f_{|Y}$ sa restriction à Y.

On désigne par T^*X le fibré cotangent à X et $\pi : T^*X \to X$ sa projection canonique. L'adhérence du fibré conormal à la partie lisse de Y est notée $T^*_Y X$ et appelée espace conormal à Y dans X.

Dans ce sous-paragraphe 3.1, sauf mention du contraire, on supposera que F n'est pas identiquement nulle sur Y.

Nous désignons par $W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y}$ l'adhérence dans $T^*X \times \mathbf{C}^p$ de

$$\{(x, \xi + \sum_{i=1}^{p} s_i \frac{df_i(x)}{f_i(x)}, s_1, \dots, s_p)\ ;\ s_i \in \mathbf{C}\ ,\ (x,\xi) \in T^*_Y X \text{ et } F(x) \neq 0\}.$$

C'est un sous-espace irréductible de $T^*X \times \mathbf{C}^p$ de dimension $n+p$.

Notons $\pi_2 : T^*X \times \mathbf{C}^p \to \mathbf{C}^p$ la projection canonique $(x,\xi,s) \mapsto s$ et par $\pi_1 : T^*X \times \mathbf{C}^p \to T^*X$ la projection canonique $(x,\xi,s) \mapsto (x,\xi)$.

Remarque 1. *Dans* [B-M-M1]*, nous avions établi les résultats suivants :*

(1) *Les fibres réduites de la restriction de π_2 à $W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y}$ sont des sous-espaces lagrangiens de T^*X. La fibre au-dessus de l'origine est un sous-espace lagrangien conique que nous noterons $W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y}(0)$.*

(2) *La projection par π_2 de $W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y} \cap F^{-1}(0)$ est une réunion d'hyperplans vectoriels de $\mathbf{C}^p$ dont les équations sont des formes linéaires à coefficients entiers positifs ou nuls. Plus précisement, soit G une composante irréductible de $W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y} \cap F^{-1}(0)$, si n_j désigne la multiplicité de f_j le long de G, $\pi_2(G)$ est l'hyperplan de $\mathbf{C}^p$ d'équations : $n_1 s_1 + \dots + n_p s_p = 0$.*

(3) *La partie de $W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y}$ au-dessus de la droite vectorielle $s_1 = \dots = s_p$ s'identifie à $W^\sharp_{F,Y}$.*

Définition 4. *Suivant* [B-M-M2]*, nous dirons que le morphisme $f_{|Y}$ est sans pente si la projection $\pi_2(W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y} \cap F^{-1}(0))$ est la réunion des hyperplans de coordonnées.*

Nous désignerons par $W_{f,Y}$ l'adhérence dans T^*X des espaces conormaux aux fibres de $f_{|Y}$. Cet espace $W_{f,Y}$ est donc l'adhérence dans T^*X de

$$\{(x, \xi + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i df_i(x)\ ;\ \lambda_i \in \mathbf{C} \text{ et } (x,\xi) \in T^*_Y X\}.$$

C'est un sous-espace irréductible de T^*X de dimension $n+r$ où r est le rang de l'application $f_{|Y} : Y \to \mathbf{C}^p$.

Si l'on considère le diagramme entre espaces cotangents associé à f :

$$T^*X \xleftarrow{{}^t f'} X \times_{\mathbf{C}^p} T^*\mathbf{C}^p \xrightarrow{f_\pi} T^*\mathbf{C}^p,$$

l'espace $W_{f,Y}$ n'est autre que l'adhérence de

$$T^*_Y X + {}^t f'(X \times_{\mathbf{C}^p} T^*\mathbf{C}^p).$$

Suivant J.-P. Henry, M. Merle et C. Sabbah dans [H-M-S] , donnons la définition d'un morphisme sans éclatement en codimension zéro.

Définition 5. *([H-M-S]) Le morphisme $f_{|Y}$ est dit sans éclatement en codimension zéro si $W_{f,Y} \cap (f = 0)$ est de dimension inférieure ou égale à n. Cette intersection est alors une sous variété lagrangienne de T^*X que nous noterons $W^0_{f,Y}$.*

Nous noterons que la définition de $W_{f,Y}$ et de $f_{|Y}$ sans éclatement en codimension zéro ne demande aucune hypothèse sur la restriction de F à Y (certains f_i peuvent s'annuler sur Y).

Nous notons $Crit^0(f_1, \ldots, f_p, Y)$ l'adhérence de l'ensemble des $y \in Y$, $F(y) \neq 0$ pour lesquels il existe une solution $(s_1, \ldots, s_p) \neq 0$ de l'équation :

$$\sum_{i=1}^{p} s_i \frac{df_i(x)}{f_i(x)} \in T^*_Y X.$$

Théorème 2. *([B-M-M2], théorème 2.7) $f_{|Y}$ est sans pente si et seulement si $f_{|Y}$ est sans éclatement en codimension zéro et $Crit^0(f_1, \ldots, f_p, Y)$ est vide.*

Remarque 2. *Rappelons ([B-M-M2], preuve du théorème 2.7) que si $f_{|Y}$ est sans pente :*
- $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$, $W^\sharp_{f,Y} \cap f_i^{-1}(0) \subset W^\sharp_{f,Y} \cap s_i^{-1}(0)$.
- *Le morhisme π_1 : $W^\sharp_{f,Y} \to W_{f,Y}$ est fini et propre.*
- *L'espace $W^\sharp_{f,Y} \cap f^{-1}(0)$ est contenue dans $s_1 = \cdots = s_p = 0$ et s'identifie à la variété lagrangienne $W_{f,Y} \cap f^{-1}(0)$.*

Notons i l'immersion fermée :

$$i : X \to X \times \mathbf{C}^p \; , \; x \longmapsto (x, t_1 = f_1(x), \ldots, t_p = f_p(x)).$$

Considérons le diagramme entre espaces cotangents associé à i :

$$T^*X \xleftarrow{{}^t i'} X \times_{X \times \mathbf{C}^p} T^*(X \times \mathbf{C}^p) \xrightarrow{i_\pi} (X \times \mathbf{C}^p).$$

Nous pouvons vérifier :

$$i_\pi({}^t i')^{-1}(T^*_Y X) = T^*_{i(Y)}(X \times \mathbf{C}^p).$$

Les espaces $W^\sharp_{(t_1,\ldots,t_p),i(Y)}$ et $W^\sharp_{f,Y}$ s'identifient. On en déduit :

Remarque 3. *$f_{|Y}$ est sans pente si et seulement si $(t_1, \ldots, t_p)_{|i(Y)}$ est sans pente.*

Proposition 4. *Supposons que $f_{|Y}$ soit sans pente, alors pour tout sous-ensemble $\{i_1, \ldots, i_r\}$ de $\{1, \ldots, p\}$ le morphisme $(f_{i_1}, \ldots, f_{i_r})_{|Y}$ est sans pente.*

Preuve : On peut supposer $\{i_1, \ldots, i_r\} = \{1, \ldots, r\}$, posons $f' = (f_1, \ldots, f_r)$ et $F' = f_1 f_2 \ldots f_r$. Comme F est non nulle sur l'espace irréductible Y, tout $(x, \xi) \in T^*_Y X$ est limite de points n'appartenant pas à $F^{-1}(0)$. Ainsi, l'adhérence de

$$\{(x, \xi + \sum_{i=1}^{r} s_i \frac{df_i(x)}{f_i(x)}, s_1, \ldots, s_r, 0, \ldots, 0) \; ; \; s_i \in \mathbf{C} \, , \, (x, \xi) \in T^*_Y X \text{ et } F'(x) \neq 0\}$$

est contenu dans $W^\sharp_{f,Y} \cap (s_{r+1} = \ldots = s_p = 0)$. Comme cette adhérence s'identifie à $W^\sharp_{f',Y}$:

$$W^\sharp_{f',Y} \subset W^\sharp_{f,Y} \cap (s_{r+1} = \cdots = s_p = 0).$$

Si G est une composante irréductible de $W^\sharp_{f',Y} \cap F'^{-1}(0)$, G est contenue dans un $f_i = 0$ pour $i \in \{1, \ldots, r\}$. Ainsi, $G \subset W^\sharp_{f,Y} \cap f_i^{-1}(0)$ est d'après la remarque 2 contenue dans $s_i = 0$.

Proposition 5. *Supposons $f_{|Y}$ sans pente. Posons, $f' = (f_1, \dots, f_r)$, $f'' = (f_{r+1}, \dots, f_p)$. Si $T^*_Z X$ est une composante irréductible de $W^\sharp_{f'',Y}(0)$ et que $F' = f_1 \dots f_r$, est non identiquement nul sur Z, alors $f'_{|Z}$ est sans pente.*

Preuve : Posons : $F'' = f_{r+1} \dots f_p$. Nous allons montrer que :

$$W^\sharp_{f',Z} \subset W^\sharp_{f,Y} \cap (s_{r+1} = \dots = s_p = 0).$$

Soit $(x, \xi, s') \in W^\sharp_{f',Z}$, par définition ce point est limite de points :

$$(y, \eta + \sum_{i=1}^{r} s'_i \frac{df_i(y)}{f_i(y)}, s'_1, \dots, s'_r) \; ; \; s'_i \in \mathbf{C} \; , \; (y, \eta) \in T^*_Z X \text{ et } F'(y) \neq 0).$$

D'autre part, les $(y, \eta, 0) \in W^\sharp_{f'',Y}(0)$ sont par définition limites de points :

$$(z, \lambda + \sum_{i=r+1}^{p} s''_i \frac{df_i(z)}{f_i(z)}, s''_{r+1}, \dots, s''_p) \; ; \; s''_i \in \mathbf{C} \; , \; (z, \lambda) \in T^*_Y X \text{ et } F''(z) \neq 0).$$

Pour z assez proche de y, $F'(z) \neq 0$ et $(x, \xi, s', 0)$ est limite de points :

$$(z, \lambda + \sum_{i=1}^{r} s'_i \frac{df_i(z)}{f_i(z)} + \sum_{i=r+1}^{p} s''_i \frac{df_i(z)}{f_i(z)}, s'_1, \dots, s'_r, s''_{r+1}, \dots, s''_p),$$

où s'_i , $s''_i \in \mathbf{C}$, $(z, \lambda) \in T^*_Y X$ et $F(z) \neq 0$. Il en résulte l'inclusion attendue. La preuve se termine comme la preuve de la proposition 4.

Proposition 6. *Supposons $f_{|Y}$ sans pente. Posons, $f' = (f_1, \dots, f_r)$ et $F' = f_1 \dots f_r$. Soit $T^*_Z X$ une composante irréductible de $W^\sharp_{F,Y}(0)$, si F' est non identiquement nul sur Z, alors $f'_{|Z}$ est sans pente.*

Preuve : Nous allons montrer que

$$W^\sharp_{f',Z} \subset W^\sharp_{f,Y} \cap (s_{r+1} = \dots = s_p = 0).$$

Soit $(x, \xi, s') \in W^\sharp_{f',Z}$, par définition ce point est limite de points :

$$(y, \eta + \sum_{i=1}^{r} s'_i \frac{df_i(y)}{f_i(y)}, s'_1, \dots, s'_r) \; ; \; s'_i \in \mathbf{C} \; , \; (y, \eta) \in T^*_Z X \text{ et } F'(y) \neq 0).$$

D'autre part, les $(y, \eta, 0) \in W^\sharp_{F,Y}(0)$ sont par définition limites de points :

$$(z, \lambda + \sum_{i=1}^{p} s \frac{df_i(z)}{f_i(z)}, s) \; ; \; s \in \mathbf{C} \; , \; (z, \lambda) \in T^*_Y X \text{ et } F(z) \neq 0).$$

Ainsi, $(x, \xi, s', 0)$ est limite de points :

$$(z, \lambda + \sum_{i=1}^{r} (s + s'_i) \frac{df_i(z)}{f_i(z)} + \sum_{i=r+1}^{p} s \frac{df_i(z)}{f_i(z)}, s + s'_1, \dots, s + s'_r, s, \dots, s),$$

où s'_i, $s \in \mathbf{C}$, $(z, \lambda) \in T^*_Y X$ et $F(z) \neq 0$. Il en résulte l'inclusion attendue. La preuve se termine comme la preuve de la proposition 4.

Proposition 7. *Si $T^*_Z X$ est une composante irréductible de $W^\sharp_{f'',Y}(0)$, alors :*

$$W^\sharp_{f',Z}(0) \subset W^\sharp_{f,Y}(0).$$

Preuve : Si $(x,\xi) \in W^{\sharp}_{f',Z}(0)$, $(x,\xi,0)$ est limite d'une suite :

$$(x_n, \eta_n + \sum_{i=1}^{r} s_i(n)\frac{df_i(x_n)}{f_i(x_n)}, s_1(n), \ldots, s_r(n)),$$

où $(x_n,\eta_n) \in T^*_Z X$ et $F'(x_n) \neq 0$. De la définition de $T^*_Z(X)$, il résulte que $(x_n,\eta_n,0)$ est lui même limite d'une suite :

$$(y_{n,m}, \eta_{n,m} + \sum_{i=r+1}^{p} s_i(n,m)\frac{df_i(y_{n,m})}{f_i(y_{n,m})}, s_{r+1}(n,m), \ldots, s_p(n,m)),$$

où $y_{n,m}, \eta_{n,m} \in T^*_Y X$ et $F''(y_{n,m}) \neq 0$. Il en résulte que $(x,\xi,0)$ est alors limite d'une sous-suite :

$$(y_{n,m}, \eta_{n,m} + \sum_{i=1}^{r} s_i(n)\frac{df_i(y_{n,m})}{f_i(y_{n,m})} + \sum_{i=r+1}^{p} s_i(n,m)\frac{df_i(y_{n,m})}{f_i(y_{n,m})},$$

$$s_1(n), \ldots, s_r(n), s_{r+1}(n,m), \ldots, s_p(n,m)),$$

On obtient : $(x,\xi,0) \in W^{\sharp}_{f,Y}(0)$.

Proposition 8. *Si $f_{|Y}$ est sans pente, $f_\pi({}^t f')^{-1}(T^*_Y X)$ est contenu dans la réunion des conormaux aux intersections des hyperplans de coordonnées de $\mathbf{C}^p$.*

Preuve : Soit $(t,\eta) = (t_1,\ldots,t_p,\eta_1,\ldots,\eta_p) \in f_\pi({}^t f')^{-1}(T^*_Y X)$. Supposons :

$$t_1 \neq 0, \ldots, t_r \neq 0 \quad \text{et} \quad t_{r+1} = \cdots = t_p = 0.$$

Par hypothèse, il existe $(x,\xi) \in T^*_Y X$ avec $t_1 = f_1(x), \ldots, t_p = f_p(x)$, tel que :

$$\sum_{i=1}^{p} \eta_i df_i(x) = \xi.$$

Prenons une suite $(x_n,\xi_n) \in T^*_Y X$ tendant vers (x,ξ) avec $F(x_n) \neq 0$. On observe que la suite de $W^{\sharp}_{f,Y}$:

$$(x_n, \sum_{i=1}^{p} \eta_i f_i(x_n)\frac{df_i(x_n)}{f_i(x_n)} - \xi_n, \eta_1 f_1(x_n), \ldots, \eta_p f_p(x_n))$$

converge vers $((x,0), \eta_1 f_1(x), \ldots, \eta_r f_r(x), 0, \ldots, 0)$ qui appartient donc à $W^{\sharp}_{f,Y}$. Comme sous l'hypothèse sans pente (remarque 2), le morphisme $W^{\sharp}_{f,Y} \to W_{f,Y}$ est fini et que les fibres de $(x,0)$ sont homogènes, il en résulte :

$$\eta_1 f_1(x) = \cdots = \eta_r f_r(x) = 0 \quad \text{et donc} \quad \eta_1 = \cdots = \eta_r = 0.$$

Ainsi : $(t,\eta) \in T^*_{t_{r+1}=\cdots=t_p=0}\mathbf{C}^p$.

Pour prendre en compte les composantes irréductibles d'une variété lagrangienne conique de T^*X, nous énonçons :

Définition 6. *Soit Λ une variété lagrangienne conique de T^*X. Nous disons que (f,Λ) est sans pente si pour toute composante irréductible $T^*_Z X$ de Λ, le morphisme $(f_{i_1},\ldots,f_{i_r})_{|Z}$ est sans pente où $\{i_1,\ldots,i_r\}$ est l'ensemble des indices i entre 1 et p tels $f_{i|Z} \neq 0$.*

3.2. **Systèmes différentiels holonomes réguliers sans pente.** Nous conservons les notations du paragraphe précédent.

Soit M un $\mathcal{D}_X$-Module holonome régulier de variété caractéristique :

$$\mathrm{car}(M) = \bigcup_{l\in L} T^*_{Y_l}X.$$

Désignons par $\mathcal{O}_X[s_1,\dots,s_p,1/F]f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$ le $\mathcal{O}_X[s_1,\dots,s_p,1/F]$-Module libre de rang 1 de base $f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$. Le produit tensoriel

$$M\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_X[s_1,\dots,s_p,1/F]f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$$

est muni de la structure naturelle de $\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]$-Module définie pour toute section m de M et a de $\mathcal{O}_X[s_1,\dots,s_p,1/F]$ par :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(m\otimes af_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}m\otimes af_1^{s_1}\dots f_p^{s_p} + m\otimes\frac{\partial a}{\partial x_i}f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p} + \sum_{j=1}^{p} m\otimes s_j a\frac{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}}{f_j}f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}.$$

Pour toute section m de M, $\mathcal{D}_X mf_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$ est un $\mathcal{D}_X$-Module cohérent et $\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]mf_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$ est un $\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]$-Module cohérent.

L'anneau $\mathcal{D}_X$ est filtré naturellement par l'ordre naturel des opérateurs différentiels. L'anneau $\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]$ est filtré en donnant de plus à s_i le poids 1.

Proposition 9. *(voir théorème 3.3 [B-M-M3]) Soit M un $\mathcal{D}_X$-Module holonome régulier M de variété caractéristique $\bigcup_{l\in L} T^*_{Y_l}X$ et m une section de M engendrant M. Nous avons :*

a) $\mathcal{D}_X mf_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$ est un $\mathcal{D}_X$-Module cohérent de variété caractéristique :

$$\mathrm{car}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X mf_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}) = \bigcup_{F_{|Y_l}\neq 0} W_{f_1,\dots,f_p,Y_l}.$$

b) $\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]mf_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$ est un $\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]$-Module cohérent de variété caractéristique :

$$\mathrm{car}_{\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]}(\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]mf_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}) = \bigcup_{F_{|Y_l}\neq 0} W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y_l}.$$

Proposition 10. *Soit M un $\mathcal{D}_X$-Module holonome régulier M de variété caractéristique $\bigcup_{l\in L} T^*_{Y_l}X$ et m une section de M engendrant M. Soit $x\in X$ et L' l'ensemble des $l\in L$ tels que $x\in Y_l$ et $F_{|Y_l}\neq 0$ au voisinage de x. Les conditions locales au voisinage de x sont équivalentes :*

(1) *Pour tout $l\in L'$, $f_{|Y_l}$ est sans pente.*

(2) *Il existe p polynômes $b_i(s)\in\mathbf{C}[s]$ non nuls tels que :*

$$b_1(s_1)\cdots b_p(s_p)mf_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}\in\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]mf_1^{s_1+1}\dots f_p^{s_p+1}.$$

(3) *Il existe p polynômes $b_i(s)\in\mathbf{C}[s]$ non nuls tels que :*

$$b_i(s_i)mf_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}\in\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]mf_if_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}.$$

Preuve : L'équivalence entre les propriétés 1 et 2 est l'objet du théorème 3.3 [B-M-M3]. Comme la propriété 3 implique clairement la propriété 2, il reste à montrer que 1 et 2 impliquent 3.

On commence par remplacer M par $M[1/F]$ qui a pour variété caractéristique (voir [G] théorème 5.5) :

$$\bigcup_{l\in L'} W^{\sharp}_{F,Y_l}(0) = \bigcup_{l\in L'} T^*_{Y_l}X \bigcup_{l\in L'} (W_{F,Y_l} \cap (F=0)).$$

L'avantage est que, sous l'hypothèse 1, si $T^*_Z X$ est une composante de la variété caractéristique de $M[1/F]$ non nul sur le produit $f_1\cdots f_r$, le morphisme $(f_1\cdots f_r)_{|Z}$ est sans pente (voir proposition 6). Par récurrence sur p, on peut ainsi supposer que la condition 3 est satisfaite pour toute famille de $p-1$ fonctions choisies dans la famille $f_1,\dots,f_p$. Considérons alors une équation fonctionnelle non triviale :

$$(*) \quad c(s_1)mf_1^{s_1}\dots f_p^{s_p} \in \sum_{i=1}^{p} \mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]mf_i f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}.$$

L'existence d'une telle équation provient sous l'hypothèse 1 de l'holonomie du $\mathcal{D}_X$-Module :

$$L = \frac{\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]mf_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}}{\sum_{i=1}^{p}\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]mf_i f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}}.$$

Pour la preuve de l'holonomie, on pourra se reporter à la preuve du théorème 3.3 [B-M-M3]. Les arguments sont les suivants : sous l'hypothèse sans pente la projection $W^{\sharp}_{f,Y} \to W_{f,Y}$ est finie, de la proposition 9 il résulte alors la cohérence de L comme $\mathcal{D}_X$-Module, enfin sous l'hypothèse sans pente la proposition 9 donne une majoration de la variété caractéristique de L par une variété lagrangienne.
En itérant l'équation fonctionnelle $*$, on trouve pour tout entier k des équations fonctionnelles :

$$c(s_1)mf_1^{s_1}\dots f_p^{s_p} \in$$
$$\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]mf_1 f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p} + \sum_{i=2}^{p}\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]mf_i^k f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}.$$

D'après l'hypothèse de récurence, nous avons pour tout $j\in\{2,\dots,p\}$ des équations non triviales :

$$b_(s_1)mf_1^{s_1}\dots f_{j-1}^{s_{j-1}} f_{j+1}^{s_{j+1}} f_p^{s_p} \in \mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]mf_1 f_1^{s_1}\dots f_{j-1}^{s_{j-1}} f_{j+1}^{s_{j+1}} f_p^{s_p}.$$

En multipliant cette équation par $f_j^{s_j+k}$ pour un entier k assez grand (pour $U\in\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]$ de degré inférieur à k, $f_j^{s_j+k}U = Vf_j^{s_j}$ où $V\in\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]$), nous obtenons :

$$b_(s_1)mf_1 f_1^{s_1}\dots f_{j-1}^{s_{j-1}} f_j^{s_j+k} f_{j+1}^{s_{j+1}}\dots f_p^{s_p} \in \mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]mf_1 f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}.$$

Nous en déduisons une équation non triviale :

$$b_i(s_i)mf_1^{s_1}\dots f_p^{s_p} \in \mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]mf_i f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p},$$

puis par symétrie que 4 est vérifiée. Le théorème est démontré. Cette méthode avait été utilisée dans le corollaire 3 page 131 de [B-B-M-M] pour montrer l'existence de telles équations dans le cas particulier $M=\mathcal{O}_X$.

Notons que M vérifie les hypothèses de cette proposition 10 si et seulement si $M[1/F]$ les vérifient.

Revenons maintenant à la situation où $H_1,\dots H_p$ sont p hypersurfaces lisses dont la réunion forme un diviseur à croisements normaux. Notons toujours $\mathbf{H}$ l'ensemble $\{H_1,\dots,H_p\}$. Soit $(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_p)$ un système de coordonnées dans lequel H_i a pour équation $t_i=0$.

Corollaire 2. *Soit M un $\mathcal{D}_X$-Module holonome régulier M de variété caractéristique $\bigcup_{l\in L} T^*_{Y_l}X$. Soit $(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_p)$ un système de coordonnées dans lequel H_i a pour équation $t_i=0$. Soit L' l'ensemble des $l\in L$ tels que $F_{|Y_l}\neq 0$ au voisinage de l'origine. Les conditions locales au voisinage de l'origine sont équivalentes :*

(1) *Pour tout $l\in L'$, $(t_1,\dots,t_p)_{|Y_l}$ est sans pente.*
(2) *Le couple $((t_1,\dots,t_p),\mathrm{car}\, M[1/t_1\dots t_p])$ est sans pente.*
(3) *Le couple $(\mathbf{H}, M[\star(H_1\cup\dots\cup H_p)])$ est sans pente.*

Preuve : Soit m une section d'un $\mathcal{D}_X$-Module M. Soit $b\in\mathbf{C}[s]$ un polynôme d'une variable, en suivant la même preuve que celle du lemme 4.4-1 [M-M], on montre que les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $b(s_1)mt_1^{s_1}\dots t_p^{s_p}\in\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]mt_1t_1^{s_1}\dots t_p^{s_p}$,
b) il existe $A\in V_{0,0,\dots,0}(\mathcal{D}_X)$ tel que dans $M[\dfrac{1}{t_1\dots t_p}]$:

$$b(t_1\frac{\partial}{\partial t_1})m = At_1m.$$

L'équivalence entre les conditions 1 et 3 résulte alors directement de la proposition 10. L'équivalence entre les conditions 1 et 2 résulte de la proposition 6.

Théorème 3. *Soit M un $\mathcal{D}_X$-Module holonome régulier. Soit un système de coordonnées $(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_p)$ de X dans lequel H_i a pour équation $t_i=0$. Les conditions locales au voisinage de l'origine sont équivalentes :*

(1) *Le couple $((t_1,\dots,t_p),\mathrm{car}\, M)$ est sans pente.*
(2) *Le couple $(\mathbf{H},M)$ est sans pente.*

Preuve : Supposons 1, d'après le corollaire 2, le couple $(\mathbf{H},M[\dfrac{1}{t_1\dots t_p}])$ est sans pente. Soit $m\in M$, il existe donc $c(s)\in\mathbf{C}[s]$ et $C\in V_{0,0,\dots,0}(\mathcal{D}_X)$ tel que la section $m'=(c(t_1\frac{\partial}{\partial t_1})-Ct_1)m$ soit nulle dans le localisé $M[\dfrac{1}{t_1\dots t_p}]$. La classe $\dot{m}'$ de la section m' dans $M[\dfrac{1}{t_1t_3\dots t_p}]$ est donc supportée par $t_2=0$. Les composantes irréductibles T^*_YX de la variété caractéristique de $\mathcal{D}_X\dot{m}'$ sont ainsi contenues dans $t_2=0$. Ceux sont des composantes irréductibles des $W^\sharp_{t_1,t_3,\dots t_p,Z}(0)$ où T^*_ZX décrit les composantes irréductibles de $\mathrm{car}\, M$. Il résulte de la proposition 6 que si le produit $t_1t_3\dots t_p$, est non nul sur Y, le morphisme $(t_1,t_3,\dots,t_p)_{|Y}$ est sans pente. Ainsi, $\mathcal{D}_X\dot{m}'$ est supporté par $t_2=0$ et le couple $((t_1,t_3,\dots,t_p),\mathrm{car}\,\mathcal{D}_X\dot{m}')$ est sans pente. Par l'équivalence entre $\mathcal{D}_X$-module supporté par une hypersurface H lisse et $\mathcal{D}_H$-module, il existe suivant le corollaire 2 : $c'(s)\in\mathbf{C}[s]$ et $C'\in V_{0,0,\dots,0}(\mathcal{D}_X)$ indépendants de t_2 et $\dfrac{\partial}{\partial t_2}$ tels que la section $(c'(t_1\frac{\partial}{\partial t_1})-C't_1)m'$ soit nulle dans le localisé $M[\dfrac{1}{t_1t_3\dots t_p}]$. Itérons, on obtient $c''(s)\in\mathbf{C}[s]$ et $C''\in V_{0,0,\dots,0}(\mathcal{D}_X)$ tels que la section $(c''(t_1\frac{\partial}{\partial t_1})-C''t_1)m$ soit nulle dans le localisé $M[\dfrac{1}{t_1}]$. D'où, pour un certain entier r :

$$(\frac{\partial}{\partial t_1})^r t_1^r(c''(t_1\frac{\partial}{\partial t_1})-C''t_1)m=0.$$

Ainsi, m satisfait une équation fonctionnelle :

$$b(t_1\frac{\partial}{\partial t_1})m=-At_1m,$$

où $b(s) \in \mathbf{C}[s]$ non nul et $A \in V_{0,0,\ldots,0}(\mathcal{D}_X)$. Nous avons ainsi montré que $(\mathbf{H}, M)$ est sans pente.

Inversement, si $(\mathbf{H}, M)$ est sans pente, d'après le corollaire 1 pour tout $\mathrm{I} \subset \{1, \ldots, p\}$, $(\mathbf{H}_\mathrm{I}, M)$ est sans pente. La condition 1 résulte alors du corollaire 2.

Examinons enfin un cas particulier étudié dans [D-M-S-T] et [M-T2] que nous généraliserons de façon géométrique à la section 4.3.2.

Remarque 4. *Soit M un $\mathcal{D}_X$-Module holonome régulier. Nous supposons que M et $M[*H_1]$ sont non caratéristiques pour $H_2 \cap \ldots \cap H_p$. Alors $(\mathbf{H}, M)$ est sans pente.*

Preuve Considérons un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_p)$ dans lequel H_i a pour équation $t_i = 0$. Nous avons montré (proposition 3.0.5 [M-T2] ou lemme 3.2 [D-M-S-T]) que toute section m de M vérifie pour tout $i \in \{2, \ldots, p\}$ des équations fonctionnelles :

$$(\frac{\partial}{\partial t_i}^k + A_{i,1}\frac{\partial}{\partial t_i}^{k-1} + \cdots + A_{i,k})m = 0,$$

où les $A_{i,j}$ sont des opérateurs différentiels indépendants de $\dfrac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial t_p}$. En multipliant par t_i^k, nous obtenons pour $i \in \{2, \ldots, p\}$:

$$(t_i)^k(\frac{\partial}{\partial t_i}^k)m \in V_{0,\ldots,0}(\mathcal{D}_X)\, t_i m.$$

De ces équations, nous avions déduit que M est relativement spécialisable par rapport à H_1 (proposition 3.0.5 [M-T2] ou proposition 3.1 [D-M-S-T]. Autrement dit, toute section m de M vérifie une équation fonctionnelle non triviale :

$$b(t_1\frac{\partial}{\partial t_1})m = At_1 m,$$

où A est un opérateur de $V_0^{H_1}(\mathcal{D}_X)$ indépendant de $\dfrac{\partial}{\partial t_2}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial t_p}$. On obtient donc une équation non triviale :

$$b(t_1\frac{\partial}{\partial t_1})m \in V_{-1,0,\ldots,0}(\mathcal{D}_X).$$

Cela montre bien que $(\mathbf{H}, M)$ est sans pente.

4. Cycles évanescents d'un faisceau construtible par un morphisme sans pente

Soit $D_c^b(\mathbf{C}_X)$ la catégorie des complexes bornés de faisceaux de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels dont les groupes de cohomologie sont des faisceaux $\mathbf{C}$-constructibles.

4.1. Images directes locales d'un faisceau constructible et complexe d'Alexander d'un faisceau constructible.

4.1.1. *Images directes locales d'un faisceau constructible.* Soit $X = \mathbf{C}^n$, un germe de variété analytique de dimension n. Soit $f = (f_1, \ldots, f_p) : X \to \mathbf{C}^p$ un morphisme analytique et $\mathcal{F} \in D_c^b(\mathbf{C}_X)$.

Suivant [K-S] proposition 8.6.4 , [Bry], [L-M], on sait associer à $\mathcal{F}$ sa variété caractéristique $\operatorname{car}\mathcal{F}$ qui est un sous-espace analytique conique lagrangien du fibré cotangent à X : $\operatorname{car}\mathcal{F}$ est la réunion de l'image du support de $\mathcal{F}$ dans la section nulle de T^*X et de l'adhérence des points (x, ξ) pour lesquels il existe $g : X, x \to \mathbf{C}$ tel que $dg(x) = \xi$ et $\phi_g(\mathcal{F}) \neq 0$.

Définition 7. *Soit* $\mathcal{F} \in D^b_c(\mathbf{C}_X)$ *de variété caractéristique* $\operatorname{car}\mathcal{F} = \bigcup_{l\in L} T^*_{Y_l}X$. *Nous dirons que* $(f, \operatorname{car}\mathcal{F})$ *est sans éclatement en codimension zéro si pour tout* $l \in L$, $f_{|Y_l}$ *est sans éclatement en codimension zéro.*

Cela revient à demander que l'intersection par $f = 0$ de l'adhérence de $\operatorname{car}\mathcal{F} + {}^t f'(X \times_{\mathbf{C}^p} \mathbf{C}^p)$ dans T^*X soit une variété lagrangienne de T^*X.

Notons :
- $B_\epsilon = \{x \in \mathbf{C}^n \ ; \ \sum_{i=1}^n \mid x_i \mid^2 < \epsilon^2\}$,
- $\overline{B_\epsilon}$ l'adhérence de B_ϵ dans $\mathbf{C}^n$,
- $D_\eta = \{t = (t_1, \dots, t_p) \in \mathbf{C}^p \ ; \ \mid t_i \mid < \eta\}$,
- $\overline{B_{\epsilon,\eta}} = \overline{B_\epsilon} \cap f^{-1}(D_\eta)$ et $B_{\epsilon,\eta} = B_\epsilon \cap f^{-1}(D_\eta)$,
- $\overline{f}_{\epsilon,\eta} : \overline{B_{\epsilon,\eta}} \to D_\eta$ et $f_{\epsilon,\eta} : B_{\epsilon,\eta} \to D_\eta$ respectivement les restrictions de f à $\overline{B_{\epsilon,\eta}}$ et $B_{\epsilon,\eta}$.

Proposition 11. *Soit* $\mathcal{F} \in D^b_c(\mathbf{C}_X)$. *Supposons que* $(f, \operatorname{car}\mathcal{F})$ *soit sans éclatement en codimension zéro. Il existe alors* $\epsilon_0 > 0$ *et une fonction décroissante* $\eta :]0, \epsilon_0] \to \mathbf{R}^+ - \{0\}$ *telle que pour tout* $0 < \epsilon' \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ *:*

$$R(\overline{f}_{\epsilon,\eta(\epsilon')})_*\mathcal{F} = R(f_{\epsilon,\eta(\epsilon')})_*\mathcal{F}.$$

Ces images directes sont à cohomologie $\mathbf{C}$*-constructible et indépendantes de* $\epsilon \in [\epsilon', \epsilon_0]$. *Leurs variétés caractéristiques sont contenues dans :*

$$(f_{\epsilon,\eta(\epsilon')})_\pi ({}^t f'_{\epsilon,\eta(\epsilon')})^{-1}(\operatorname{car}\mathcal{F}).$$

Nous les appelerons les images directes locales de $\mathcal{F}$.

Remarque sur la preuve : c'est un résultat bien connu sur les morphismes sans éclatement en codimension 0 qui s'appuie sur les propositions 5.4.17 et 8.5.8 de [K-S]. Par hypothèse,

$$\Lambda = \overline{\operatorname{car}\mathcal{F} + {}^t f'(X \times_{\mathbf{C}^p} \mathbf{C}^p)} \cap f^{-1}(0)$$

est une variété lagrangienne conique de T^*X. Si l'on considère la fonction anlytique $\phi(x) = \sum_{i=1}^n \mid x_i \mid^2$ sur Λ, les valeurs réeles telles qu'il existe $x \in \mathbf{C}^n$ vérifiant $t = \phi(x)$ et $d\phi(x) \in \Lambda$ sont discrètes (proposition 8.3.12 [K-S]). La plus petite de ses valeurs strictement positives est la valeur ϵ_0 attendue dans la proposition (voir preuve de proposition 8.5.8).

4.1.2. *Complexe d'Alexander d'un faisceau constructible.* Suivant C. Sabbah ([S3] définition 2.2.7) à une image directe propre près, définissons le complexe d'Alexander de $\mathcal{F}$. Pour ce faire, considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
f^{-1}(0) & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & X^* = X - F^{-1}(0) & \xleftarrow{p} & \tilde{X} \\
\downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f^* & & \downarrow \tilde{f} \\
\{0\} & \xrightarrow{i} & \mathbf{C}^p & \xleftarrow{j} & (\mathbf{C}^*)^p & \xleftarrow{p} & \mathbf{C}^p,
\end{array}$$

où $\mathbf{C}^p$ est le revêtement universel de $(\mathbf{C}^*)^p$ et p le morphisme :

$$\mathbf{C}^p \longrightarrow (\mathbf{C}^*)^p \ : \ p(z_1, \dots, z_p) = (e^{2i\pi z_1}, \dots, e^{2i\pi z_p}).$$

Définition 8. *On appelle complexe d'Alexander de* $\mathcal{F} \in D^b_c(\mathbf{C}_X)$, *le complexe :*

$${}^A\Psi_f\mathcal{F} = i^{-1}Rj_*p_*p^{-1}j^{-1}\mathcal{F}.$$

La i^{éme} monodromie sur ${}^A\Psi_f\mathcal{F}$ est l'isomorphisme :

$$M_i : {}^A\Psi_f\mathcal{F} \longrightarrow {}^A\Psi_f\mathcal{F}$$

induit par le morphisme d'adjonction :

$$(jp)_*(jp)^{-1}\mathcal{F} \longrightarrow (jp)_*(T_i)_*T_i^{-1}(jp)^{-1}\mathcal{F} = (jp)_*(jp)^{-1}\mathcal{F},$$

où T_i est le morphisme de translation :

$$T_i \ : \ \mathbf{C}^p \longrightarrow \mathbf{C}^p \ ; \ (z_1,\dots,z_p) \longmapsto (z_1,\dots z_{i-1}, z_i+1, z_{i+1},\dots,z_p).$$

Le morphisme $can : i^{-1}\mathcal{F} \longrightarrow {}^A\Psi_f(\mathcal{F})$ désigne le morphisme induit par le morphisme d'adjonction associé à $j \circ p$:

$$\mathcal{F} \longrightarrow j_*p_*p^{-1}j^{-1}\mathcal{F} \ : \ s \longmapsto s \circ j \circ p.$$

Pour tout $i \in \{1,2,\dots,p\}$, il résulte de $j\circ p\circ T_i = j \circ p$ que $M_i \circ \mathrm{can} = \mathrm{can}$.

Soit $f' = (f_1,\dots,f_r)$, $f'' = (f_{r+1},\dots,f_p)$, $F' = f_1 \dots f_r$ et $F'' = f_{r+1}\dots f_p$. Considérons les complexes d'Alexander ${}^A\Psi_{f'}\mathcal{F}$ et ${}^A\Psi_{f''}\mathcal{F}$ associés aux diagrammes :

$$\begin{array}{ccccccc}
f'^{-1}(0) & \xrightarrow{i'} & X & \xleftarrow{j'} & X'^* = X - F'^{-1}(0) & \xleftarrow{p'} & \tilde{X}' \\
\downarrow & & \downarrow f' & & \downarrow f'^* & & \downarrow \tilde{f}' \\
\{0\} & \xrightarrow{i'} & \mathbf{C}^r & \xleftarrow{j'} & (\mathbf{C}^*)^r & \xleftarrow{p'} & \mathbf{C}^r,
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
f''^{-1}(0) & \xrightarrow{i''} & X & \xleftarrow{j''} & X''^* = X - F''^{-1}(0) & \xleftarrow{p''} & \tilde{X}'' \\
\downarrow & & \downarrow f'' & & \downarrow f''^* & & \downarrow \tilde{f}'' \\
\{0\} & \xrightarrow{i''} & \mathbf{C}^{p-r} & \xleftarrow{j''} & (\mathbf{C}^*)^{p-r} & \xleftarrow{p''} & \mathbf{C}^{p-r}.
\end{array}$$

Considérons alors les diagrammes de carrés cartésiens :

$$\begin{array}{lllll}
f^{-1}(0) & \xrightarrow{i'} & f''^{-1}(0) & \xleftarrow{j'p'} & \tilde{X}' \cap f''^{-1}(0) \\
\downarrow i'' & \searrow i & \downarrow i'' & & \downarrow i'' \\
f'^{-1}(0) & \xrightarrow{i'} & X & \xleftarrow{j'p'} & \tilde{X}' \\
\uparrow j''p'' & & \uparrow j''p'' & \nwarrow jp & \uparrow \pi'' \\
\tilde{X}'' \cap f'^{-1}(0) & \xrightarrow{i'} & \tilde{X}'' & \xleftarrow{\pi'} & \tilde{X}.
\end{array}$$

Pour simplifier, posons $a = j'p'$ et $b = j''p''$. On a les morphismes :

$$
\begin{array}{lcl}
{}^A\Psi_{f'}({}^A\Psi_{f''}\mathcal{F}) & & {}^A\Psi_{f'}(i''^{-1}\mathcal{F}) \\
\quad \| & & \quad \| \\
i'^{-1}Ra_*a^{-1}i''^{-1}Rb_*b^{-1}\mathcal{F} & \xleftarrow{adj.(b)} & i'^{-1}Ra_*a^{-1}i''^{-1}\mathcal{F} \\
\quad \| & & \quad \| \\
i'^{-1}Ra_*i''^{-1}a^{-1}b_*b^{-1}\mathcal{F} & \xleftarrow{adj.(b)} & i'^{-1}Ra_*i''^{-1}a^{-1}\mathcal{F} \\
\quad \uparrow chgt.base/i'' & & \quad \uparrow chgt.base/i'' \\
i'^{-1}i''^{-1}Ra_*a^{-1}b_*b^{-1}\mathcal{F} & \xleftarrow{adj.(b)} & i'^{-1}i''^{-1}Ra_*a^{-1}\mathcal{F} \\
\quad \simeq\downarrow chgt.base/a & & \quad \| \\
{}^A\Psi_f\mathcal{F} & \xleftarrow{adj.(\pi'')} & i''^{-1}({}^A\Psi_{f'}\mathcal{F}) \\
\quad \simeq\uparrow chgt.base/b & & \quad \| \\
i''^{-1}i'^{-1}Rb_*b^{-1}a_*a^{-1}\mathcal{F} & \xleftarrow{adj.(b)} & i''^{-1}i'^{-1}Ra_*a^{-1}\mathcal{F} \\
\quad \downarrow chgt.base/i' & & \quad \| \\
i''^{-1}Rb_*i'^{-1}b^{-1}a_*a^{-1}\mathcal{F} & & i''^{-1}i'^{-1}Ra_*a^{-1}\mathcal{F} \\
\quad \| & & \quad \| \\
i''^{-1}Rb_*b^{-1}i'^{-1}a_*a^{-1}\mathcal{F} & \xleftarrow{adj.(b)} & i''^{-1}i'^{-1}Ra_*a^{-1}\mathcal{F} \\
\quad \| & & \quad \| \\
{}^A\Psi_{f''}({}^A\Psi_{f'}\mathcal{F}) & & i''^{-1}({}^A\Psi_{f'}\mathcal{F}).
\end{array}
$$

Ces diagrammes commutent puisque l'adjonction commute au changement de base.

Pour $i \leq r$, les isomorphismes de translation T_i sur $\tilde{X'}, \tilde{X}, \tilde{X'} \cap f''^{-1}(0)$ commutent aux mophismes π'' et i''. On en déduit la commutativité du diagramme :

$$
\begin{array}{ccc}
{}^A\Psi_f\mathcal{F} & \xleftarrow{M_i({}^A\Psi_f\mathcal{F})} & {}^A\Psi_f\mathcal{F} \\
\downarrow & & \downarrow \\
{}^A\Psi_{f'}({}^A\Psi_{f''}\mathcal{F}) & \xleftarrow{M_i\left({}^A\Psi_{f'}({}^A\Psi_{f''}\mathcal{F})\right)} & {}^A\Psi_{f'}(i''^{-1}\mathcal{F}).
\end{array}
$$

De même pour $i > r$, les isomorphismes de translation T_i sur $\tilde{X''}, \tilde{X}, \tilde{X''} \cap f'^{-1}(0)$ commutent aux mophismes π'' et i'. On en déduit la commutativité du diagramme :

$$
\begin{array}{ccc}
{}^A\Psi_f\mathcal{F} & \xleftarrow{M_i({}^A\Psi_f\mathcal{F})} & {}^A\Psi_f\mathcal{F} \\
\downarrow & & \downarrow \\
{}^A\Psi_{f'}({}^A\Psi_{f''}\mathcal{F}) & \xleftarrow{{}^A\Psi_{f'}\left(M_i({}^A\Psi_{f''}\mathcal{F})\right)} & {}^A\Psi_{f'}(i''^{-1}\mathcal{F}).
\end{array}
$$

En résumé :

Proposition 12. *Il existe un diagrame canonique commutatif compatible aux morphismes de monodromies :*

$$
\begin{array}{ccc}
{}^A\Psi_{f'}({}^A\Psi_{f''}\mathcal{F}) & \longleftarrow & {}^A\Psi_{f'}(i''^{-1}\mathcal{F}) \\
\uparrow & & \uparrow \\
{}^A\Psi_f\mathcal{F} & \longleftarrow & i''^{-1}({}^A\Psi_{f'}\mathcal{F}) \\
\downarrow & \swarrow & \\
{}^A\Psi_{f''}({}^A\Psi_{f'}\mathcal{F}). & &
\end{array}
$$

Pour $p > 1$, suivant C. Sabbah ([S3] définition 2.2.7), ${}^A\Psi_f(\mathcal{F})$ n'est en général pas **C**-constructible, par contre c'est un complexe de faisceaux à cohomologie $\mathbf{C}[\mathbf{Z}^p]$ constructible.

4.2. **Cycles évanescents d'un faisceau construtible par un morphisme sans pente.** Soit X un germe de variété analytique de dimension n et Y un sous-espace irréductible de X. Soit $f_1, \ldots, f_p$ des fonctions analytiques sur X nulles à l'origine. Notons $F = f_1 f_2 \cdots f_p$ leur produit et désignons par f l'application :

$$f : X \longrightarrow \mathbf{C}^p \quad , \quad (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_n))$$

et par $f_{|Y}$ sa restriction à Y.

Soit $\mathcal{F} \in D^b_c(\mathbf{C}_X)$. Rappelons la définition 6 : le couple $((f_1, \ldots, f_p), \operatorname{car} \mathcal{F})$ est sans pente si pour toute composante irréductible $T^*_Z X$ de la variété caractéristique de $\mathcal{F}$, on ait $(f_{i_1}, \ldots, f_{i_r})_{|Z}$ sans pente où $\{i_1, \ldots, i_r\} = \{0 \leq i \leq p \, ; \; f_{i|Z} \neq 0\}$.

Si $((f_1, \ldots, f_p), \operatorname{car} \mathcal{F})$ est sans pente, $((f_1, \ldots, f_p), \operatorname{car} \mathcal{F})$ est sans éclatement en codimension 0 et nous avons rappelé l'existence d'images directes locales $R(f_{\epsilon,\eta(\alpha)})_* \mathcal{F}$ dont la variété caractéristique est majorée par :

$$(f_{\epsilon,\eta(\alpha)})_\pi ({}^t f'_{\epsilon,\eta(\alpha)})^{-1} \operatorname{car} F.$$

Il résulte de la proposition 8 que le sous-espace $(f_{\epsilon,\eta(\alpha)})_\pi ({}^t f'_{\epsilon,\eta(\epsilon)})^{-1} \operatorname{car} F$ est réunion de conormaux à des intersections d'hyperplans de coodonnées de $\mathbf{C}^p$. Il résulte alors de la proposition 11 :

Proposition 13. *Si $((f_1, \ldots, f_p), \operatorname{car} \mathcal{F})$ est sans pente, les images directes locales $R(f_{\epsilon,\eta(\alpha)})_* \mathcal{F}$ sont constuctibles et leurs variétés caractéristiques sont réunion de conormaux à des intersections d'hyperplans de coodonnées de $\mathbf{C}^p$.*

Les groupes de cohomologie de $R(f_{\epsilon,\eta(\alpha)})_* \mathcal{F}$ sont alors localement constants sur les strates de la stratification induite par les intersections des hyperplans de coordonnées de $\mathbf{C}^p$. Le complexe de faisceaux ${}^A\Psi_f \mathcal{F}$ est alors la généralisation naturelle pour un morphisme sans pente du foncteur des cycles évanescents défini par P. Deligne dans [D].

Définition 9. *Si $((f_1, \ldots, f_p), \operatorname{car} \mathcal{F})$ est sans pente, nous appelons ${}^A\Psi_f(\mathcal{F})$ le complexe des cycles évanescents de $\mathcal{F}$ par f et le notons $\Psi_f(\mathcal{F})$.*

Théorème 4. *Soit $\mathcal{F} \in D^b_c(\mathbf{C}_X)$, si $((f_1, \ldots, f_p), \operatorname{car} \mathcal{F})$ est sans pente, nous avons :*

(1) *$\Psi_f \mathcal{F} \in D^b_c(\mathbf{C}_X \cap f^{-1}(0))$ et $\operatorname{car} \Psi_f \mathcal{F} \subset \bigcup_{\alpha \in A} W^\sharp_{f_1, \ldots, f_p, Z_\alpha} \cap f^{-1}(0)$, où $(T^*_{Z_\alpha} X)_{\alpha \in A}$ décrit les composantes irréductibles de $\operatorname{car} \mathcal{F}$ sur lesquelles F est non identiquement nulle.*

(2) *Pour tout r compris entre 1 et p, les morphismes canoniques :*

$$\Psi_{(f_1, \ldots, f_p)} \mathcal{F} \longrightarrow \Psi_{(f_1, \ldots, f_r)} (\, \Psi_{(f_{r+1}, \ldots, f_p)} \mathcal{F} \,)$$

sont des isomorphismes.

Lemme 2. *Si $((f_1, \ldots, f_p), \operatorname{car} \mathcal{F})$ est sans pente, soit le réel positif ϵ_0 et la fonction η associés aux images directes locales de $\mathcal{F}$ par f. Alors :*

– *Pour tout $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$:*

$$(i^{-1} \mathcal{F})_0 \simeq R\Gamma(\overline{B}_{\epsilon,\eta(\epsilon)} \cap f^{-1}(0), \mathcal{F}).$$

– *Pour tout $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, $t = (t_1, \ldots, t_p) \in D^*_{\eta(\epsilon)} = D_{\eta(\epsilon)} - \{t_1 \ldots t_p = 0\}$:*

$$(\Psi_f \mathcal{F})_0 \simeq R\Gamma(\overline{B}_{\epsilon,\eta(\epsilon)} \cap f^{-1}(t), \mathcal{F}).$$

On rappelle que i désigne l'inclusion de $f^{-1}(0)$ dans X et $\overline{B}_{\epsilon,\eta(\epsilon)}$ désigne $\overline{B}_\epsilon \cap f^{-1}(D_{\eta(\epsilon)})$.

Preuve du lemme : Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma(\overline{B}_{\epsilon,\eta(\epsilon)},\mathcal{F}) & \xrightarrow{j_\epsilon} & R\Gamma(\overline{B}_{\epsilon,\eta(\epsilon)}\cap f^{-1}(0),\mathcal{F}) \\ 1\downarrow & & \downarrow 3 \\ R\Gamma(D_{\eta(\epsilon)},Rf_*\,\mathcal{F}_{|\overline{B}_\epsilon}) & \xrightarrow{2} & (Rf_*\,\mathcal{F}_{|\overline{B}_\epsilon})_0. \end{array}$$

La flêche verticale 1 est un isomorphisme depuis que l'image directe d'un faisceau flasque est flasque. La flêche horizontale 2 est un isomorphisme par constructibilité de $Rf_*(\mathcal{F}_{|\overline{B}_{\epsilon,\eta(\epsilon)}})$ relativement au croisement normal de $D_{\eta(\epsilon)}$. La flêche verticale 3 est un isomorphisme, car la restriction de f à $\overline{B}_\epsilon$ est propre. Il en résulte que j_ϵ est un isomorphisme.

On a d'autre part, pour tout $0<\epsilon'\leq\epsilon\leq\epsilon_0$, le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma(\overline{B}_{\epsilon,\eta(\epsilon)},\mathcal{F}) & \xrightarrow{j_\epsilon\ (iso)} & R\Gamma(\overline{B}_{\epsilon,\eta(\epsilon)}\cap f^{-1}(0),\mathcal{F}) \\ r_{\epsilon',\epsilon}\downarrow & & \downarrow 4 \\ R\Gamma(\overline{B}_{\epsilon',\eta(\epsilon')},\mathcal{F}) & \xrightarrow{j_{\epsilon'}\ (iso)} & R\Gamma(\overline{B}_{\epsilon',\eta(\epsilon')}\cap f^{-1}(0),\mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (i^{-1}\mathcal{F})_0 & = & (i^{-1}\mathcal{F})_0. \end{array}$$

La flêche 4 est un isomorphisme, car : $R(\overline{f}_{\epsilon,\eta(\epsilon')})_*\mathcal{F}=R(\overline{f}_{\epsilon',\eta(\epsilon')})_*\mathcal{F}$ (voir proposition 11). La première partie du lemme s'en déduit, puisque les $\overline{B}_{\epsilon,\eta(\epsilon)}$ forment un système fondamental de voisinages de l'origine.

Montrons la deuxième partie du lemme. Reprenons pour cela le diagramme des cycles évanescents de f en restriction à $\overline{B}_{\epsilon,\eta(\epsilon')}$:

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{B}_{\epsilon,\eta(\epsilon')}\cap f^{-1}(0) & \xrightarrow{i} & \overline{B}_{\epsilon,\eta(\epsilon')} & \xleftarrow{j} & \overline{B}^*_{\epsilon,\eta(\epsilon')}=\overline{B}_{\epsilon,\eta(\epsilon')}-F^{-1}(0) & \xleftarrow{p} & \tilde{B}_{\epsilon,\eta(\epsilon')} \\ \downarrow & & \downarrow \overline{f}_{\epsilon,\eta(\epsilon')} & & \downarrow \overline{f^*}_{\epsilon,\eta(\epsilon')} & & \downarrow \tilde{f}_{\epsilon,\eta(\epsilon')} \\ \{0\} & \xrightarrow{i} & D_{\eta(\epsilon')} & \xleftarrow{j} & D^*_{\eta(\epsilon')}=D_{\eta(\epsilon')}-\{t_1\dots t_p=0\} & \xleftarrow{p} & \tilde{D}_{\eta(\epsilon')} \end{array}$$

où $\tilde{D}_{\eta(\epsilon')}$ est le revêtement universel de $D^*_{\eta(\epsilon')}$. L'application p étant un revêtement :

$$p^{-1}R(\overline{f^*}_{\epsilon,\eta(\epsilon')})_*\mathcal{F}=R(\tilde{f}_{\epsilon,\eta(\epsilon')})_*(p^{-1}\mathcal{F}).$$

Pour tout $\tilde{w}\in\tilde{D}_{\eta(\epsilon')}$ et $w=p(\tilde{w})$, l'égalité des fibres donnent :

$$R\Gamma(\overline{B}_{\epsilon,\eta(\epsilon')}\cap f^{-1}(w),\mathcal{F})=R\Gamma(\tilde{B}_{\epsilon,\eta(\epsilon')}\cap\tilde{f}^{-1}(w),p^{-1}\mathcal{F}).$$

D'autre part, comme $R(\overline{f}_{\epsilon,\eta(\epsilon')})_*\mathcal{F}$ est constructible relativement au croisement normal de $D_{\eta(\epsilon')}$, $R(\overline{f^*}_{\epsilon,\eta(\epsilon')})_*\mathcal{F}$ est à cohomologie localement constante. Ainsi, $R(\tilde{f}_{\epsilon,\eta(\epsilon')})_*(p^{-1}\mathcal{F})$ est à cohomologie localement constante sur $\tilde{D}_{\eta(\epsilon')}$, donc constante, car $\tilde{D}_{\eta(\epsilon')}$ est isomorphe à $\mathbf{C}^p$.

On obtient, pour tout $0<\epsilon'\leq\epsilon\leq\epsilon_0$ et $w\in\tilde{D}_{\eta(\epsilon')}$ le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma(\tilde{D}_{\eta(\epsilon')},R(\tilde{f}_{\epsilon,\eta(\epsilon')})_*(p^{-1}\mathcal{F})) & \xrightarrow{\simeq} & R(\tilde{f}_{\epsilon,\eta(\epsilon')})_*(p^{-1}\mathcal{F})_{\tilde{w}}=R(\overline{f}_{\epsilon,\eta(\epsilon')})_*(p^{-1}\mathcal{F})_w \\ \downarrow & & \downarrow 5 \\ R\Gamma(\tilde{B}_{\epsilon,\eta(\epsilon)},p^{-1}\mathcal{F}) & \xrightarrow{\simeq} & R\Gamma(\overline{B}_\epsilon\cap f^{-1}(w),\mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow 6 \\ R\Gamma(\tilde{B}_{\epsilon',\eta(\epsilon')},p^{-1}\mathcal{F}) & \xrightarrow{\simeq} & R\Gamma(\overline{B}_{\epsilon'}\cap f^{-1}(w),\mathcal{F}). \end{array}$$

La flêche 5 est un isomorphisme, puisque $\overline{f}_{\epsilon,\eta(\epsilon')}$ est propre. La flêche 6 est un isomorphisme puisque $R(\overline{f}_{\epsilon,\eta(\epsilon')})_*\mathcal{F} = R(\overline{f}_{\epsilon',\eta(\epsilon')})_*\mathcal{F}$.

Par définition du foncteur Ψ_f :

$$(\Psi_{(f_1,\ldots,f_p)}\mathcal{F})_0 = \lim_{\overrightarrow{\epsilon}} R\Gamma(\tilde{B}_{\epsilon,\eta(\epsilon)}, p^{-1}\mathcal{F}).$$

On obtient donc pour tout $0 < \epsilon' \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ et $w \in \tilde{D}_{\eta(\epsilon')}$:

$$(\Psi_{(f_1,\ldots,f_p)}\mathcal{F})_0 = R\Gamma(\overline{B}_\epsilon \cap f^{-1}(w), \mathcal{F}).$$

ce qui démontre la deuxième partie du lemme.

Preuve du théorème : Nous procédons par récurrence sur p. Posons $f' = (f_1,\ldots,f_r)$ et $f'' = (f_{r+1},\ldots,f_p)$.

Pour $p = 1$, $\Psi_f\mathcal{F}$ est le complexe des cycles évanescents de P. Deligne [D]. Ce complexe est constructible (voir par exemple [K-S] proposition 8.6.3.), sa variété caratéristique (voir [G] théorème 5.5) est :

$$\bigcup_{\alpha\in A} W^\sharp_{f,Z_\alpha} \cap f^{-1}(0),$$

où $(T^*_{Z_\alpha}X)_{\alpha\in A}$ décrit les composantes irréductibles de $\operatorname{car}\mathcal{F}$ non identiquement nulles sur F.

Supposons $p > 1$. Par hypothèse de récurrence, $\Psi_{(f_{r+1},\ldots,f_p)}\mathcal{F}$ est à cohomologie constructible et sa variété caractéristique est contenue dans la réunion des $W^\sharp_{f'',Z_\alpha}(0)$ où $T^*_{Z_\alpha}X$ est une composante irréductible de $\operatorname{car}\mathcal{F}$ non identiquement nulles sur F''. D'après la proposition 5, si $T^*_Z Y$ est une composante irréductible de $W^\sharp_{f'',Z_\alpha}(0)$ et que Z est non identiquement nul sur $F' = f_1\ldots f_r$, alors $f'_{|Z}$ est sans pente. Il en résulte que $(f', \operatorname{car}\Psi_{f''}\mathcal{F})$ est sans pente.

Posons :
- $D'_\eta = \{t = (t_1,\ldots,t_r) \in \mathbf{C}^r \ ; \ | t_i | < \eta\}$,
- $D''_\eta = \{t = (t_{r+1},\ldots,t_p) \in \mathbf{C}^{p-r} \ ; \ | t_i | < \eta\}$,
- $D'^*_\eta = D'_\eta - \{t_1\ldots t_r = 0\}$ et $D''^*_\eta = D''_\eta - \{t_{r+1}\ldots t_p = 0\}$.

Quitte à les diminuer, on peut supposer que ϵ_0 et les fonctions η associés aux images directes locales de $\Psi_{f''}(\mathcal{F})$ par f' et de $\mathcal{F}$ par f coïncident. D'après le lemme 2, pour tout $0 < \alpha < \epsilon_0$ et tout $w' \in D'^*_{\eta(\alpha)}$:

$$(\Psi_{f'}(\Psi_{f''}\mathcal{F}))_0 = R\Gamma(\overline{B}_\alpha \cap f'^{-1}(w'), \Psi_{f''}\mathcal{F}).$$

Nous allons donc calculer : $R\Gamma(\overline{B}_\alpha \cap f'^{-1}(w'), \Psi_{f''}\mathcal{F})$. Fixons $w' \in D'^*_{\eta(\alpha)}$ et considérons β et γ tel que :

$$0 < \alpha < \beta \leq \epsilon_0 \quad \text{et} \quad 0 < \gamma < \eta(\beta) - \max\{| w'_1 | \ldots | w'_r | = \gamma(\beta)\}.$$

Posons :

$$\begin{aligned} D_{\eta(\beta),\gamma,w'} &= \left\{ t \in \mathbf{C}^p \ ; \ \begin{pmatrix} | t_i - w'_i | < \gamma & \text{pour } i \in \{1,\ldots,r\} \\ | t_j | < \eta(\beta) & \text{pour } j \in \{r+1,\ldots,p\} \end{pmatrix} \right\}. \\ T_{\beta,\gamma,w'} &= \{x \in \overline{B}_\beta \ ; \ f(x) \in D_{\eta(\beta),\gamma,w'}\}. \end{aligned}$$

Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} T_{\beta,\gamma,w'} & \stackrel{\overline{f}_{\beta,\gamma,w'}}{\longrightarrow} & D_{\eta(\beta),\gamma,w'} & \stackrel{\pi''}{\longrightarrow} & D''_{\eta(\beta)} \\ || & & & & || \\ T_{\beta,\gamma,w'} & & \stackrel{\overline{f''}_{\beta,\gamma,w'}}{\longrightarrow} & & D''_{\eta(\beta)}, \end{array}$$

où $\overline{f}_{\beta,\gamma,w'}$ et $\overline{f''}_{\beta,\gamma,w'}$ désignent les restrictions de f et f'' et où π'' désigne la projection $(t',t'') \mapsto t''$.

Le complexe $R(\overline{f}_{\beta,\gamma,w'})_*\mathcal{F}$ est à cohomologie constructible relativement au croisement normal de $D_{\eta(\beta),\gamma,w'}$. Il en résulte que $R(\overline{f''}_{\beta,\gamma,w'})_*\mathcal{F}$ qui est égal à $R(\pi'')_*R(\overline{f}_{\beta,\gamma,w'})_*\mathcal{F}$ est à cohomologie constructible relativement à ce même croisement normal.

Reprenons une partie du diagramme des cycles évanescents de f'' :

$$\begin{array}{ccccc} T_{\beta,\gamma,w'} & \longleftarrow & T^*_{\beta,\gamma,w'} & \stackrel{p''}{\longleftarrow} & \tilde{T}_{\beta,\gamma,w'} \\ \downarrow & & \downarrow \overline{f''}_{\beta,\gamma,w'} & & \downarrow \tilde{f''}_{\beta,\gamma,w'} \\ D''_{\eta(\beta)} & \longleftarrow & D''^*_{\eta(\beta)} & \stackrel{p''}{\longleftarrow} & \tilde{D}''_{\eta(\beta)}, \end{array}$$

où $T^*_{\beta,\gamma,w'} = T_{\beta,\gamma,w'} - \{f_{r+1} \dots f_p = 0\}$. L'application p étant un revêtement :

$$R(\tilde{f''}_{\beta,\gamma,w'})_*(p''^{-1}\mathcal{F}) = p''^{-1}(R(\overline{f''}_{\beta,\gamma,w'})_*\mathcal{F})$$

est à cohomologie localement constante sur $\tilde{D}''_{\eta(\beta)}$. Pour tout $\tilde{w''} \in \tilde{D}''_{\eta(\alpha)}$, si $w'' = p''(\tilde{w''})$, on a les isomorphismes :

$$\begin{array}{rcl} R\Gamma(\tilde{T}_{\beta,\gamma,w'}, p''^{-1}\mathcal{F})) & \simeq & R\Gamma(\tilde{D}''_{\eta(\beta)}, R(\tilde{f''}_{\beta,\gamma,w'})_*(p''^{-1}\mathcal{F}) \\ & \simeq & R(\tilde{f''}_{\beta,\gamma,w'})_*(p''^{-1}\mathcal{F})_{\tilde{w''}} \\ & \simeq & R(\overline{f''}_{\beta,\gamma,w'})_*\mathcal{F})_{w''} \\ & \simeq & R\Gamma(\cap_{i=1}^r\{\mid t_i - w'_i \mid < \gamma\} \cap_{i=r+1}^p \{t_i = w''_i\}, R(\overline{f}_{\beta,\gamma,w'})_*\mathcal{F})) \end{array} .$$

Par constructibilité de $R(\overline{f}_{\beta,\gamma,w'})_*\mathcal{F})$ relativement au croisement normal de $D_{\eta(\beta),\gamma,w'}$, nous obtenons :

$$\begin{array}{rcl} R\Gamma(\tilde{T}_{\beta,\gamma,w'}, p''^{-1}\mathcal{F}) & \simeq & R\Gamma(\cap_{i=1}^r\{t_i = w'_i\} \cap_{i=r+1}^p \{t_i = w''_i\}, R(\overline{f}_{\beta,\gamma,w'})_*\mathcal{F})) \\ & \simeq & R\Gamma(\overline{B}_\beta \cap f^{-1}(w',w''), \mathcal{F}). \end{array}$$

Ainsi pour tout β tel que $0 < \alpha < \beta < \epsilon_0$ et tout $(w',w'') \in D^*_{\eta(\alpha)}$:

$$R\Gamma(\tilde{T}_{\beta,\gamma,w'}, p''^{-1}\mathcal{F}) \simeq R\Gamma(\overline{B}_\beta \cap f^{-1}(w',w''), \mathcal{F})$$

qui sont de plus indépendants de β.

Comme la restriction de f à $\overline{B}_\alpha$ est propre, les $T_{\beta,\gamma,w'}$ forment un système fondamental de voisinage de $\overline{B}_\alpha \cap f'^{-1}(w') \cap f''^{-1}(0)$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} (\Psi_{f'}(\Psi_{f''}\mathcal{F}))_0 & \simeq & R\Gamma(\overline{B}_\alpha \cap f'^{-1}(w'), \Psi_{f''}\mathcal{F}) \\ & \simeq & \varinjlim_{\beta,\gamma} R\Gamma(\tilde{T}_{\beta,\gamma,w'}, p''^{-1}\mathcal{F}) \\ & \simeq & R\Gamma(\overline{B}_\beta \cap f^{-1}(w',w''), \mathcal{F}) \\ & \simeq & (\Psi_{(f_1,\dots,f_p)}\mathcal{F})_0. \end{array}$$

On obtient enfin, par récurrence, la majoration de la variété caractéristique de $\Psi_f(\mathcal{F})$ à l'aide de la proposition 7.

Théorème 5. *Si* $((f_1,\ldots,f_p),\mathrm{car}\,\mathcal{F})$ *est sans pente, les isomorphismes canoniques :*

$$i'^{-1}(\Psi_{f''}\mathcal{F}) \longrightarrow \Psi_{f''}(i'^{-1}\mathcal{F})$$

sont des isomorphismes de $D^b_c(\mathbf{C}_X)$*. De plus,*

$$\mathrm{car}\,(i'^{-1}\Psi_{f''}\mathcal{F}) \subset \bigcup_{\alpha\in A} W^{\sharp}_{f_1,\ldots,f_p,Z_\alpha} \cap f^{-1}(0),$$

où $(T^*_{Z_\alpha}X)_{\alpha\in A}$ *décrit les composantes irréductibles de* $\mathrm{car}\,\mathcal{F}$ *sur lesquelles* F'' *est non identiquement nulle.*

Preuve du théorème : La constructibilité étant conservée par image inverse, il résulte du théorème 4 que les complexes $i'^{-1}(\Psi_{f''}\mathcal{F})$ et $\Psi_{f''}(i'^{-1}\mathcal{F})$ sont à cohomologie constructible. Soit $\mathcal{G} \in D^b_c(\mathbf{C}_X)$, il résulte du corollaire 6.4.4 , de la proposition 6.2.4 et du lemme 6.2.1 de [K-S] que :

$$\mathrm{car}\,(i'^{-1}(\mathcal{G})) \subset \cup W^{\sharp}_{f',Z_\alpha}(0),$$

où $T^*_{Z_\alpha}X$ décrit les composantes irréductibles de $\mathrm{car}\,\mathcal{G}$. La majoration attendue résulte alors de celle du théorème 4 et de la proposition 7. On peut aussi par récurrence traiter le cas où le but de f' est de dimension 1 et utiliser le calcul de la variété caractéristique de la restriction à une hypersurface donnée dans [G] ou [B-M-M4].

Il nous reste à montrer que i'^{-1} et $\Psi_{f''}$ commutent. Cette preuve est identique à celle du théoréme 4. On peut supposer que ϵ_0 et les fonctions η associées aux images directes locales de $\Psi_{f''}\mathcal{F}$ par f' et de $\mathcal{F}$ par f coïncident.

D'après le lemme 2, pour tout $0<\alpha<\epsilon_0$:

$$(i'^{-1}\Psi_{f''}\mathcal{F})_0 = R\Gamma(\overline{B}_\alpha \cap f'^{-1}(0), \Psi_{f''}\mathcal{F}).$$

Nous allons donc calculer : $R\Gamma(\overline{B}_\alpha \cap f'^{-1}(0), \Psi_{f''}\mathcal{F})$. Pour tout β tel que $0<\alpha<\beta\leq\epsilon_0$ et $0<\gamma<\eta(\beta)$, posons :

$$\begin{array}{rcl} D_{\eta(\beta),\gamma} & = & \left\{ t\in\mathbf{C}^p\ ;\ \left[\begin{array}{ll} \mid t_i \mid < \gamma & \text{pour } i\in\{1,\ldots,r\} \\ \mid t_j \mid < \eta(\beta) & \text{pour } j\in\{r+1,\ldots,p\} \end{array}\right.\right\}. \\ T_{\beta,\gamma} & = & \{x\in\overline{B}_\beta\ ;\ f(x)\in D_{\eta(\beta),\gamma}\}. \end{array}$$

Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} T_{\beta,\gamma} & \xrightarrow{\overline{f}_{\beta,\gamma}} & D_{\eta(\beta),\gamma} & \xrightarrow{\pi''} & D''_{\eta(\beta)} \\ || & & & & || \\ T_{\beta,\gamma} & & \xrightarrow{\overline{f''}_{\beta,\gamma}} & & D''_{\eta(\beta)}, \end{array}$$

où $\overline{f}_{\beta,\gamma}$ et $\overline{f''}_{\beta,\gamma}$ désignent les restritions de f et f''.

Le complexe $R(\overline{f}_{\beta,\gamma})_*\mathcal{F}$ est à cohomologie constructible relativement au croisement normal de $D_{\eta(\beta),\gamma}$. Il en résulte que $R(\overline{f''}_{\beta,\gamma})_*\mathcal{F}$ qui est égal à $R(\pi'')_*R(\overline{f}_{\beta,\gamma})_*\mathcal{F}$ est à cohomologie constructible relativement au croisement normal de $D''_{\eta(\beta)}$.

Reprenons une partie du diagramme des cycles évanescents de f'' :

$$\begin{array}{ccccc} T_{\beta,\gamma} & \longleftarrow & T^*_{\beta,\gamma} & \overset{p''}{\longleftarrow} & \tilde{T}_{\beta,\gamma} \\ \downarrow & & \downarrow \overline{f''}_{\beta,\gamma} & & \downarrow \tilde{f''}_{\beta,\gamma} \\ D''_{\eta(\beta)} & \longleftarrow & D''^*_{\eta(\beta)} & \overset{p''}{\longleftarrow} & \tilde{D}''_{\eta(\beta)}, \end{array}$$

où $T^*_{\beta,\gamma} = T_{\beta,\gamma} - \{f_{r+1} \dots f_p = 0\}$. L'application p étant un revêtement :

$$R(\tilde{f''}_{\beta,\gamma})_*(p''^{-1}\mathcal{F}) = p''^{-1}(R(\overline{f''}_{\beta,\gamma})_*\mathcal{F})$$

est à cohomologie localement constante sur $\tilde{D}''_{\eta(\beta)}$. Pour tout $\tilde{w''} \in \tilde{D}''_{\eta(\alpha)}$, si $w'' = p''(\tilde{w''})$, on a les isomorphismes :

$$\begin{array}{rcl} R\Gamma(\tilde{T}_{\beta,\gamma}, p''^{-1}\mathcal{F}) & \simeq & R\Gamma(\tilde{D}''_{\eta(\beta)}, R(\tilde{f''}_{\beta,\gamma})_*(p''^{-1}\mathcal{F}) \\ & \simeq & R(\tilde{f''}_{\beta,\gamma})_*(p''^{-1}\mathcal{F})_{\tilde{w''}} \\ & \simeq & R(\overline{f''}_{\beta,\gamma})_*\mathcal{F})_{w''} \\ & \simeq & R\Gamma(\cap_{i=1}^r\{\mid t_i \mid < \gamma\} \cap_{i=r+1}^p \{t_i = w''_i\}, R(\overline{f}_{\beta,\gamma,w'})_*\mathcal{F})) \end{array}$$

Par constructibilité de $R(\overline{f}_{\beta,\gamma})_*\mathcal{F}$ relativement au croisement normal de $D_{\eta(\beta),\gamma}$, nous obtenons :

$$\begin{array}{rcl} R\Gamma(\tilde{T}_{\beta,\gamma,w'}, p''^{-1}\mathcal{F}) & \simeq & R\Gamma(\cap_{i=1}^r\{t_i = 0\} \cap_{i=r+1}^p \{t_i = w''_i\}, R(\overline{f}_{\beta,\gamma,w'})_*\mathcal{F}) \\ & \simeq & R\Gamma(\overline{B}_\beta \cap f^{-1}(0, w''), \mathcal{F}). \end{array}$$

Ainsi que pour tout β tel que $0 < \alpha < \beta < \epsilon_0$ et tout $w'' \in D^*_{\eta(\alpha)}$:

$$R\Gamma(\tilde{T}_{\beta,\gamma}, p''^{-1}\mathcal{F}) \simeq R\Gamma(\overline{B}_\beta \cap f^{-1}(0, w''), \mathcal{F})$$

qui sont de plus indépendants de β.

Comme la restriction de f à $\overline{B}_\alpha$ est propre, les $T_{\beta,\gamma}$ forment un système fondamental de voisinage de $\overline{B}_\alpha \cap f'^{-1}(0) \cap f''^{-1}(0)$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} (\, i'^{-1}(\Psi_{f''}\mathcal{F})\,)_0 & \simeq & R\Gamma(\overline{B}_\alpha \cap f'^{-1}(0), \Psi_{f''}\mathcal{F}) \\ & \simeq & \varinjlim_{\beta,\gamma} R\Gamma(\tilde{T}_{\beta,\gamma}, p''^{-1}\mathcal{F}) \\ & \simeq & R\Gamma(\overline{B}_\beta \cap f^{-1}(0, w''), \mathcal{F}) \\ & \simeq & (\Psi_{f''}(i'^{-1}\mathcal{F}))_0. \end{array}$$

Cela montre le résultat attendu.

Proposition 14. *Si* $((f_1, \dots, f_p), \operatorname{car}\mathcal{F})$ *est sans pente, soit* $(T^*_{Y_\alpha}X)_{\alpha \in A}$ *les composantes irréductibles de* $\operatorname{car}\mathcal{F}$ *non contenues dans* $F^{-1}(0)$*, alors :*

$$\operatorname{car}(\Psi_f\mathcal{F}) = \bigcup_{\alpha \in A} W^\sharp_{f,Y_\alpha} \cap f^{-1}(0) = \bigcup_{\alpha \in A} W_{f,Y_\alpha} \cap f^{-1}(0) \quad .$$

Preuve : Comme $f_{|Y_\alpha}$ est sans pente pour $\alpha \in A$, on a (voir remarque 2) :

$$W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y_\alpha} \cap f^{-1}(0) = W_{f_1,\dots,f_p,Y_\alpha} \cap f^{-1}(0).$$

Cela montre la dernière égalité dans la proposition. Pour le reste procédons par récurrence sur p.

Pour $p=1$, soit Σ_1 les projections des composantes irréductibles $T^*_Y X$ de car $\mathcal{F}$ non contenues dans $f_1=0$. Suivant [G] théorème 5.5 :

$$\operatorname{car}(\Psi_{f_1}(\mathcal{F})) = \bigcup_{Y\in\Sigma_1} W^\sharp_{f_1,Y} \cap f_1^{-1}(0).$$

C'est exactement la proposition pour $p=1$.

Pour $Y \in \Sigma_1$, soit Σ'_Y les projections des composantes irréductibles $T^*_Z X$ de $W^\sharp_{f_1,Y}\cap f_1^{-1}(0)$ non contenues dans $f_2\dots f_p=0$. Comme $\Psi_f\mathcal{F} = \Psi_{f_2,\dots,f_p}(\Psi_{f_1}\mathcal{F})$, par hypothèse de récurrence :

$$\operatorname{car}(\Psi_f\mathcal{F}) = \bigcup_{Y\in\Sigma_1}\bigcup_{Z\in\Sigma'_Y} W^\sharp_{f_2,\dots,f_p,Z}\cap(f_2=\dots=f_p=0).$$

Comme $Y\subset (f_2\dots f_p=0)$ implique $W^\sharp_{f_1,Y}\subset(f_2\dots f_p=0)$, on a encore :

$$\operatorname{car}(\Psi_f\mathcal{F}) = \bigcup_{Y\in\Sigma'_1}\bigcup_{Z\in\Sigma'_Y} W^\sharp_{f_2,\dots,f_p,Z}\cap(f_2=\dots=f_p=0),$$

oú Σ'_1 désignent l'ensemble des projections des composantes irréductibles de car $\mathcal{F}$ non contenues dans $F=0$.

La proposition résultera alors du lemme suivant :

Lemme 3. *Soit Y non contenue dans $F=0$ et Σ'_Y les projections des composantes irréductibles de $W^\sharp_{f_1,Y}\cap f_1^{-1}(0)$ non contenues dans $f_2\dots f_p=0$. Supposons $f_{|Y}$ sans pente, alors :*

$$W^\sharp_{f,Y}\cap f_1^{-1}(0) = \bigcup_{Z\in\Sigma'_Y} W^\sharp_{f_2,\dots,f_p,Z}\subset T^*X\times\mathbf{C}^{p-1}.$$

L'identification faite dans ce lemme est justifiée par le fait que sous l'hypothèse sans pente $W^\sharp_{f,Y}\cap f_1^{-1}(0)$ est contenue dans $s_1=0$ (voir remarque 1).

Preuve du lemme : On rappelle de plus que sous l'hypothèse sans pente (voir remarque 1) les composantes irréductibles de $W^\sharp_{f,Y}\cap f_1^{-1}(0)$ (qui sont de dimension $n+p-1$) ne sont pas contenues dans l'hypersurface $f_2\dots f_p=0$. Il en résulte :

$$W^\sharp_{f,Y}\cap f_1^{-1}(0) = \overline{W^\sharp_{f,Y}\cap f_1^{-1}(0)\cap(f_2\dots f_p\neq 0)}.$$

Si $(x,\xi,0,s_2,\dots,s_p)\in W^\sharp_{f,Y}\cap f_1^{-1}(0)\cap(f_2\dots f_p\neq 0)$, il est limite de points :

$$(x_n,\xi_n+s_1(n)\frac{df_1(x_n)}{f_1(x_n)}+\sum_{j=2}^p s_j(n)\frac{df_j(x_n)}{f_j(x_n)}, s_1(n),\dots,s_p(n)).$$

Le point $(x_n,\sum_{j=2}^p s_j(n)\frac{df_j(x_n)}{f_j(x_n)}, s_2(n),\dots,s_p(n))$ tend vers

$$(x,\sum_{j=2}^p s_j\frac{df_j(x)}{f_j(x)}, s_2,\dots,s_p).$$

Il en résulte que le point $(x_n,\xi_n+s_1(n)\frac{df_1(x_n)}{f_1(x_n)}, s_1(n))$ tend vers une limite :

$$(x,\alpha,0)\in W^\sharp_{f_1,Y}\cap f_1^{-1}(0)\cap(f_2\dots f_p\neq 0)\quad .$$

Cela montre l'inclusion :

$$W^{\sharp}_{f,Y} \cap f_1^{-1}(0) \subset \bigcup_{Z\in\Sigma'_Y} W^{\sharp}_{f_2,\ldots,f_p,Z}.$$

Inversement, si $(x,\xi,s_2,\ldots,s_p) \in W^{\sharp}_{f_2,\ldots,f_p,Z}$ pour un $Z \in \Sigma'_Y$, ce point est limite de

$$(x_n, \eta_n + \sum_{j=2}^{p} s_j(n)\frac{df_j(x_n)}{f_j(x_n)}, s_2(n),\ldots,s_p(n)) ,$$

où $(x_n,\eta_n) \in T^*_Z X$. Chaque $(x_n,\eta_n,0)$ est alors limite de

$$(x_{n,m}, \eta_{n,m} + s_1(n,m)\frac{df_1(x_{n,m})}{f_1(x_{n,m})}, s_1(n,m),$$

où $(x_{n,m},\eta_{n,m}) \in T^*_Y X$. Il en résulte :

$$(x,\xi,s_2,\ldots,s_p) \in W^{\sharp}_{f,Y} \cap f_1^{-1}(0).$$

Remarque 5. *Soit $\mathcal{F} \in D^b_c(\mathbf{C}_X)$ de variété caratéristique $\bigcup T^*_Y X$. Désignons par j l'inclusion ouverte $j : F \neq 0 \to X$. Si $f_{|Y}$ est sans pente pour les Y non contenues dans $F^{-1}(0)$, alors le couple $(f, \operatorname{car} j_! j^{-1}\mathcal{F})$ est sans pente pour $j_! j^{-1}\mathcal{F}$.*

Preuve : En effet (voir [G]) :

$$\operatorname{car} j_! j^{-1}\mathcal{F} = \bigcup_{F_{|Y}\neq 0} W^{\sharp}_{F,Y} \cap F^{-1}(0).$$

Il reste à utiliser la proposition 6. Cette remarque est l'analogue géométrique de l'équivalence entre les propriétés 1 et 2 du corollaire 2.

Cette remarque est utile puisque pour tout f : $\Psi_f\mathcal{F} = \Psi_f(j_! j^{-1}\mathcal{F})$.

4.3. **Restriction non caractéristique et morphisme sans pente.**

4.3.1. *Restriction non caractéristique.* Considérons X un voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}^n$ et Y un germe de sous-espace analytique de X. Soit $g = (g_1,\ldots,g_p) : X \to \mathbf{C}^p$ une submersion. Nous dirons que g est à fibres non caractéristiques pour $T^*_Y X$ si

$$T^*_Y X \cap T^*_{g^{-1}(0)} X \subset T^*_X X.$$

Cela implique pour $t \in \mathbf{C}^p$ voisin de l'origine :

$$T^*_Y X \cap T^*_{g^{-1}(t)} X \subset T^*_X X.$$

On notera également que, sous cette hypothèse, les g_i sont non identiquement nulles sur Y.

Si A et B désignent deux sous-ensembles de T^*X, rappelons la notation :

$$A + B = \{(x, a+b) \; ; \; (x,a) \in A \text{ et } (x,b) \in B\}.$$

Lemme 4. *Si $g : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^p$ est une submersion à fibres non caractéristiques pour $T^*_Y X$, nous avons :*

(1) $g_\pi({}^t g')^{-1}(T^*_Y X) \subset T^*_{\mathbf{C}^p}\mathbf{C}^p$,

(2) $W_{g,Y} \bigcap g^{-1}(0) = T^*_Y X + T^*_{g^{-1}(0)} X$ *(qui est donc sous-variété lagrangienne de T^*X).*

Preuve du lemme : Comme le covecteur $\sum_{i=1}^{p} \eta_i dg_i(x)$ est conormal aux fibres de g, le premier point résulte du fait que sous nos hypothèses, la relation :

$$\sum_{i=1}^{p} \eta_i dg_i(x) \in T^*_Y X \quad \Longrightarrow \quad \eta_1 = \cdots = \eta_p = 0.$$

Suivant [K-S] lemme 5.4.7 et corollaire 8.3.18, l'hypothèse non caractéristique implique que $T^*_Y X + T^*_{g^{-1}(0)} X$ est un sous-ensemble analytique lagrangien fermé de T^*X.

Il reste à montrer que $W_{g,Y} \bigcap g^{-1}(0) = T^*_Y X + T^*_{g^{-1}(0)} X$.

$$T^*_Y X + T^*_{g^{-1}(0)} X = \{(x, \xi + \sum_{i=1}^{p} \eta_i dg_i(x)) \;;\; (x,\xi) \in T^*_Y X \text{ et } g(x) = 0\}.$$

De la définition de $W_{g,Y}$, il résulte :

$$T^*_Y X + T^*_{g^{-1}(0)} X \subset W_{g,Y} \cap g^{-1}(0).$$

Nous avons puisque g est une submersion :

$$W_g = \{(x, \sum_{i=1}^{p} \eta_i dg_i(x)) \;;\; x \in X \text{ et } (\eta_1, \ldots \eta_p) \in \mathbf{C}^p\} \subset T^*X.$$

Il résulte de l'hypothèse non caractéristique que l'intersection de W_g et de $T^*_Y X$ est contenue dans la section nulle de X. Suivant [K-S] lemme 5.4.7 $T^*_Y X + W_g$ est un sous-ensemble analytique fermé de T^*X. Il en résulte :

$$W_{g,Y} \subset T^*_Y X + W_g.$$

D'où, l'inclusion qui manque, puisque $T^*_{g^{-1}(0)} X = W_g \cap g^{-1}(0)$.

Il résulte des lemmes 4 et 2, des propositions 11 et 14 la proposition suivante :

Proposition 15. *Soit $\mathcal{F} \in D^b_c(\mathbf{C}_X)$ et $g : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^p$ une submersion à fibres non caractéristiques pour toute composante de la variété caractéristique de $\mathcal{F}$. Alors, nous avons :*
- *Le couple $(g, \mathrm{Car}\,\mathcal{F})$ est sans pente.*
- *Les images directes locales $Rg_*\mathcal{F}$ sont à cohomologie localement constante.*
- *Le morphime canonique $i^{-1}\mathcal{F} \to \Psi_g \mathcal{F}$ est un isomorphisme.*
- $\mathrm{Car}\,(i^{-1}\mathcal{F}) = \mathrm{Car}\,(\Psi_g \mathcal{F}) = \mathrm{Car}\,\mathcal{F} + T^*_{g^{-1}(0)} X.$

4.3.2. *Restriction non caractéristique d'un morphisme sans pente.* Considérons X un voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}^n$ et Y un germe de sous-espaces analytique de X. On considère une submersion $g = (g_1, \ldots, g_r) : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^r$ et $f = (f_{r+1}, \ldots, f_p) : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^{p-r}$. On note (g, f) l'application :

$$(g, f) : \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^p \;:\; x \mapsto (g(x), f(x)).$$

Lemme 5. *On suppose que $f_{|Y}$ est sans pente et que la submersion g est à fibres non caractéristiques pour $W_{f,Y} \cap f^{-1}(0)$. Alors :*

(1) *Au voisinage de $(g, f)^{-1}(0)$, le sous-espace $(g, f)_\pi({}^t(g, f)')^{-1}(T^*_Y X)$ s'identifie au croisement normal $T_{\mathbf{C}^r}\mathbf{C}^r \times f_\pi({}^t f')^{-1}(T^*_Y X)$ de $\mathbf{C}^p$.*

(2) $W_{(g,f),Y} \cap (g, f)^{-1}(0) = (W_{f,Y} \cap f^{-1}(0)) + T^*_{g^{-1}(0)} X$.

(3) $(g, f)_{|Y} : Y \to \mathbf{C}^p$ *est sans pente.*

Preuve du lemme : Supposons $\sum_{i=1}^{r}\lambda_i dg_i(x)+\sum_{i=r+1}^{p}\lambda_i df_i(x)\in T_Y^*X$. Cela implique au voisinage de $(g,f)^{-1}(0)$ que $\lambda_i=0$ pour $i\in\{1,\dots,r\}$. On obtiendrait sinon un covecteur non nul dans $W_{f,Y}\cap f^{-1}(0)\cap T^*_{g^{-1}(0)}X$ ce qui contredirait l'hypothèse que g est à fibres non caractéristiques. Il en résulte : $\sum_{i=r+1}^{p}\lambda_i df_i(x)\in T_Y^*X$ et donc $(x,\lambda_{r+1},\dots,\lambda_p)$ appartient à $f_\pi({}^tf')^{-1}(T_Y^*X)$. Cela établit le point 1 de la proposition.

Soit $(x,\xi)\in W_{f,Y}\cap f^{-1}(0)+T^*_{g^{-1}(0)}X$, il s'écrit :

$$(x,\xi)=(x,\alpha+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i dg_i(x))\text{ où }(x,\alpha)\in W_{f,Y}\text{ et }g(x)=f(x)=0.$$

Le point (x,α) est donc limite de $(x_n,\beta_n+\sum_{i=r+1}^{p}\lambda_i(n)df_i(x_n))$ où $(x_n,\beta_n)\in T_Y^*X$. Il en résulte que (x,ξ) est limite de la suite :

$$(x_n,\beta_n+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i dg_i(x_n))+\sum_{i=r+1}^{p}\lambda_i(n)df_i(x_n)).$$

Ainsi, $(x,\xi)\in W_{(g,f),Y}\cap(g,f)^{-1}(0)$.

Inversement, supposons $(x,\xi)\in W_{(g,f),Y}\cap(g,f)^{-1}(0)$. Le point (x,ξ) est alors limite de

$$(x_n,\beta_n+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i dg_i(x_n))+\sum_{i=r+1}^{p}\lambda_i(n)df_i(x_n)),$$

où $(x_n,\beta_n)\in T_Y^*X$. Or, par hypothèse, au vosinage de $(g,f)^{-1}(0)$:

$$W_g\cap W_{f,Y}\subset T_X^*X.$$

Il en résulte $W_g+W_{f,Y}$ fermé et $(x,\xi)\in W_g+W_{f,Y}$. D'où :

$$(x,\xi)\in(W_{f,Y}\cap f^{-1}(0))+T^*_{g^{-1}(0)}X.$$

Ainsi, on obtient l'égalité attendue au point 2.

Enfin, $(W_{f,Y}\cap f^{-1}(0))\cap T^*_{g^{-1}(0)}X$ est par hypothèse contenue dans la section nulle de T^*X. Ces deux variétés étant lagrangiennes coniques, il en résulte que $(W_{f,Y}\cap f^{-1}(0))+T^*_{g^{-1}(0)}X$ est elle même lagrangienne conique. La troisième assertion résulte alors des deux premières.

Nous déduisons de ce lemme :

Proposition 16. *Soit $\mathcal{F}\in D^b_c(\mathbf{C}_X)$ et $\cup_{\alpha\in A}T^*_{Y_\alpha}X$ sa variété caractéristique. Notons $I_\alpha=\{i\in\{r+1,\dots,p\}\ ;\ f_{i|Y_\alpha}\neq 0\}$ et $f_\alpha=(f_j)_{j\in_\alpha}$. Supposons que le couple $(f,\operatorname{Car}\mathcal{F})$ soit sans pente et et que la submersion g soit à fibres non caractéristiques pour les $W_{f_\alpha,Y_\alpha}\cap f_\alpha^{-1}(0)$, alors :*

- *$((g,f),\operatorname{Car}\mathcal{F})$ est sans pente.*
- *Les images directes locales $R(g,f)_*\mathcal{F}$ sont à cohomologie constructible relativement au croisement normal $T_{\mathbf{C}^r}\mathbf{C}^r\times f_\pi({}^tf')^{-1}(\operatorname{car}F)$.*
- *Si i désigne l'inclusion de $g^{-1}(0)$ dans X, nous avons les isomorphismes canoniques :*

$$\Psi_f(i^{-1}\mathcal{F})\simeq i^{-1}(\Psi_f\mathcal{F})\simeq\Psi_{g,f}(\mathcal{F}).$$

- $\operatorname{car}\Psi_{g,f}\mathcal{F})=\cup_{Y_\beta\in B}(W_{f,Y_\beta}\cap g^{-1}(0))+T^*_{g^{-1}(0)}X$ *, où Y_β décrit les projections des composantes de* $\operatorname{car}\mathcal{F}$ *non identiquement nulles sur le produit $F=f_{r+1}\dots f_p$.*

Si dans la proposition, nous supposons seulement que la submersion g est à fibres non caractéristiques sur les $W_{f,Y} \cap f^{-1}(0)$ où $T^*_Y X$ est une composante de car $\mathcal{F}$ sur laquelle F est non identiquement nulle, alors $j_! j^{-1}\mathcal{F}$ vérifie les hypothèses de la propoposition. En particulier, nous aurons toujours :

$$\Psi_f(i^{-1}\mathcal{F}) \simeq i^{-1}\Psi_f(\mathcal{F}) \simeq \Psi_{g,f}(\mathcal{F}).$$

Dans nos articles [M-T2] et [D-M-S-T], nous avions étudié cette situation d'un point de vue algébrique lorque f est constituée d'une seule fonction ($p - r = 1$). La proposition 16 apporte un complément géométrique à cette étude.

Références

[B] Briançon J., Espaces conormaux relatifs I : conditions de transversalité, Ann. Scient. Ec Norm. Sup., $4^{éme}$ série, t.3 (1997) 675-692.

[B-M] Barlet D., Maire H.-M., Développements asymptotiques, transformation de Mellin complexe et intégration sur les fibres, In Lecture Notes in Mathematics, volume 1295, page 11-23, 1987.

[Bry] Brylinski J.-L., (Co)-Homologie d'intersection et faisceaux pervers, Séminaire Bourbaki 585, (1981-82).

[B-B-M-M] Biosca H., Briançon J., Maisonobe Ph., Maynadier H., Espaces conormaux relatifs II : Modules différentiels, Publications of R.I.M.S., Kyoto University, vol 34 (1998) 123-134. DOI : 10.2977/prims/1195144757

[B-M-M1] Briançon J., Maisonobe Ph., Merle M., Constructibilité de l'idéal de Bernstein, Advanced Studies in Pure Mathematics 29, Singularities - Sapporo 1998 (2000) 79-95.

[B-M-M2] Briançon J., Maisonobe Ph., Merle M., Éventails associés à des fonctions analytiques, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics 238 (2002) 61-71.

[B-M-M3] Briançon J., Maisonobe Ph., Merle M., Equations fonctionnelles associées à des fonctions analytiques, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics 238 (2002) 77-87.

[B-M-M4] Briançon J., Maisonobe Ph., Merle M., Localisation de systèmes différentiels, stratifications de Whitney et conditions de Thom, Inventiones mathematicae, 117, (1994) 531-550. DOI : 10.1007/BF01232255

[D] Deligne P., Le formalisme des cycles évanescents, in SGA 7 II, exposé XIII et XIV, Lectures Notes In Math 340, Springer Verlag, (1973).

[D-M-S-T] Dimca A., Maisonobe Ph., Saito M. et Torrelli T., Multiplier ideals, V-filtrations and transversal sections, Math. Ann., vol. 336, p 901-924, (2006). DOI : 10.1007/s00208-006-0020-z

[G] Ginsburg V., Characteristic varieties and vanishing cycles. Invent. Math. 84, 327-402 (1986). DOI : 10.1007/BF01388811

[G-G] González-Pérez P., González-Villa M., Motivic Milnor fiber of quasi-ordinary hypersurface, Journal fur die reine angewandte Mathematik, 2012.

[H-L-T] Hironaka H., Lejeune M., Teissier B., Applatissement local, Singularités à Cargèse, Astérisque 7 et 8, (1973), 441-463.

[H-M-S] Henry J.-P.-G., Merle M., Sabbah C., Sur la condition de Thom stricte pour un morphisme analytique complexe. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., $4^{éme}$ série, t 17, (1984), 227-268.

[K1] Kashiwara M., B-functions and holonomic systems, Invent. Math. 38 (1976) 33–53. DOI : 10.1007/BF01390168

[K2] Kashiwara M., Vanishing cycles and holonomic systems of differential equations, Lecture Notes in Math. vol 1016 (1983) 131-142.

[K3] Kashiwara M., The Riemann Hilbert problem for holonomic systems, Pub. Res. Inst. Math. Sci. 20, p. 319-365 , 1984. DOI : 10.2977/prims/1195181610

[K-S] Kashiwara M., Schapira P., Sheaves on manifold, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer Verlag , (1990).

[L] Loeser F., Fonctions zêta locales d'Igusa à plusieurs variables, intégration dans les fibres, et discriminants, Annales Scientifiques de l'ENS, 4 ^{éme} série, tomme 22, n 3, 1989, p435-471.

[Li] Lipman, J., Introduction to Resolution of Singularities, Prooceedings of symposia In Pure Mathematics, Volume 40 (1983).

[L-M] Lê D. T. , Mebkhout Z. , Variétés caractéristiques et variétés polaires, C.R. Acad. Sci. Paris, 296 (1983).

[M-M] Maisonobe Ph., Mebkhout Z., Le théorème de comparaison pour les cycles évanescents, Séminaires et Congrès 8, collection SMF (2004) 311-389.

[M-T1] Maisonobe Ph., Torrelli T., Image inverse en théorie des D-modules,
Dans Séminaires et Congrès, vol. 8.
Société mathématique de France, p. 1-57 , (2004).

[M-T2] Maisonobe Ph., Torrelli T., D-modules relatifs et cycles évanescents,
Singularités vol. 18 de l'Institut Elie Cartan
Institut Elie Cartan - SMF, p. 125-137 , (2006).

[M] Malgrange B., Polynôme de Bersntein-Sato et cohomologie évanescente, analyse et topologie sur les espaces singuliers, Astérisque 101-102 volume II-III, Société Mathématique de France, p. 233-267, 1983.

[Meb] Mebkhout Z., Une équivalence de catégorie et une autre équivalence de catégorie, Compositio Mathematicae 51, p. 51-88, 1984.

[R] Roualland O., Développements asymptotiques d'intégrales-fibres sous certaines conditions géométriques, Thèse de l'Université de Nice Sophia-Antipolis, 29 novembre 2002.

[S1] Sabbah C., Proximité évanescente, I. La structure polaire d'un $\mathcal{D}$-Module, Compositio Mathematica 62 (1987) 283–328.

[S2] Sabbah C., Proximité évanescente, II. Équations fonctionnelles pour plusieurs fonctions analytiques, Compositio Mathematica 64 (1987) 213-241.

[S3] Sabbah C., Modules d'Alexander et $\mathcal{D}$-Modules, Duke Mathematical Journal, Vol. 30, No. 3, (1990).

[S4] Sabbah C., Morphismes analytiques stratifiés sans éclatement et cycles évanescents, analyse et topologie sur les espaces singuliers, Astérisque 101-102 volume II-III, Société Mathématique de France, p.286-319, 1983.

[S5] Sabbah C., Appendice à proximité évanescente II, Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, janvier 1988.

[Sc-Sc] Schapira P, Schneiders J.-P., Index Theorem for Elliptics Pairs, Astérisque 224, (1994).

Univ. Nice Sophia Antipolis, CNRS, LJAD, UMR 7351, 06100 Nice, France